



UNIVERSITÀ  
DI SIENA  
1240

CORSO DI LAUREA IN LAUREA IN GEOTECNOLOGIE

---

# Proiezioni Stereografiche

---

**Paolo Conti**

*conti@unisi.it*

2008

Dipartimento di Scienze della Terra  
Università degli Studi di Siena  
Via Laterina 8  
53100 - Siena

[www.dst.unisi.it](http://www.dst.unisi.it)

Centro di GeoTecnologie  
Università degli Studi di Siena  
Via Vetri Vecchi 34  
52027 - San Giovanni Valdarno (AR)

[www.geotecnologie.unisi.it](http://www.geotecnologie.unisi.it)

10 marzo 2013

Queste dispense sono destinate agli studenti dell'Università degli Studi di Siena. ESSE HANNO SOLO SCOPO DIDATTICO, VENGONO DISTRIBUITE GRATUITAMENTE E NON POSSONO ASSOLUTAMENTE ESSERE MESSE IN VENDITA SOTTO QUALSIASI FORMA.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione e origine delle proiezioni stereografiche</b>	<b>1</b>
1.1	Usò delle proiezioni stereografiche . . . . .	1
1.2	Tipi di proiezione . . . . .	1
1.3	Storia e applicazioni delle proiezioni stereografiche . . . . .	3
1.3.1	Cartografia . . . . .	3
1.3.2	Mineralogia . . . . .	4
1.4	Proiezioni zenitali equiarea . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Misura di piani e linee</b>	<b>7</b>
2.1	Misura di strutture planari . . . . .	7
2.2	Misura di strutture lineari . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Principi di proiezione</b>	<b>9</b>
3.1	Proiezione di linee . . . . .	9
3.2	Proiezione di piani . . . . .	9
3.3	Proiezione di coni . . . . .	11
3.4	Proiezioni equiangolari ed equiarea . . . . .	11
3.4.1	Proiezione di una linea . . . . .	12
3.4.2	Proiezione di un piano . . . . .	15
3.4.3	Proiezione di un cono . . . . .	17
3.5	Proiezioni stereografiche in coordinate cartesiane . . . . .	18
3.6	Variazione della semisfera di proiezione . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Metodi di proiezione di linee, piani, poli</b>	<b>21</b>
4.1	Proiezione di una linea . . . . .	22
4.2	Proiezione di un piano come traccia ciclografica . . . . .	22
4.3	Proiezione del polo di un piano . . . . .	22
4.4	Orientazione di un dato punto o traccia ciclografica . . . . .	25
4.5	Proiezione di un cono . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Operazioni con linee e piani</b>	<b>31</b>
5.1	Proiezione di una linea noto il pitch . . . . .	31
5.2	Piano contenente due linee . . . . .	31
5.3	Intersezione tra due piani . . . . .	34
5.4	Inclinazione reale e inclinazione apparente . . . . .	35
5.5	Angolo tra due linee . . . . .	36
5.6	Angolo tra due piani . . . . .	38
5.7	Piano bisettore tra due piani . . . . .	39
5.8	Proiezione di una linea su un piano . . . . .	41
5.9	Angolo tra un piano e una linea . . . . .	42
5.10	Rotazioni attorno ad un asse . . . . .	42
5.10.1	Rotazione attorno ad un asse verticale . . . . .	42
5.10.2	Rotazione attorno ad un asse orizzontale . . . . .	43
5.10.3	Rotazione attorno ad un asse inclinato . . . . .	44

<b>6</b>	<b>Analisi statistica</b>	<b>47</b>
<b>7</b>	<b>Proiezione di vettori e solidi</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>60</b>
	<b>Appendici</b>	
<b>A</b>	<b>Reticoli per proiezioni stereografiche</b>	<b>63</b>
<b>B</b>	<b>Rotazioni: restaurazione di strati inclinati, discordanze e paleocorrenti</b>	<b>71</b>
B.1	Restaurazione di strati inclinati e discordanze . . . . .	71
B.2	Restaurazione di paleocorrenti . . . . .	73
B.2.1	Strati inclinati con asse orizzontale . . . . .	73
B.2.2	Strati inclinati con asse inclinato . . . . .	73
<b>C</b>	<b>Soluzione degli esercizi</b>	<b>75</b>

# Capitolo 1

## Introduzione e origine delle proiezioni stereografiche

### 1.1 Uso delle proiezioni stereografiche

Le proiezioni stereografiche sono strumenti fondamentali nelle scienze della terra perché permettono la risoluzione di numerosi problemi tridimensionali di geometria e di statistica mediante elaborazioni in due dimensioni. In geologia l'orientazione della faccia di un cristallo, di uno strato, di una frattura, di una faglia, può essere rappresentata immaginando tale piano che passa dal centro di una sfera, la sfera di proiezione. Dal centro della sfera la linea ortogonale al piano intercetta la sfera in un punto, il polo del piano. Sulla sfera di proiezione il polo del piano è caratterizzato da una latitudine e una longitudine.

Rappresentare in due dimensioni l'orientazione di una struttura planare si riduce quindi ad un classico problema di cartografia ed astronomia: rappresentare in due dimensioni un punto su una sfera è infatti una necessità che in antichità avevano anche astronomi e cartografi per costruire mappe del cielo e carte geografiche. Astronomi e cartografi per primi quindi introdussero secoli fa i metodi di proiezione che sono poi diventati usuali in geologia [15].

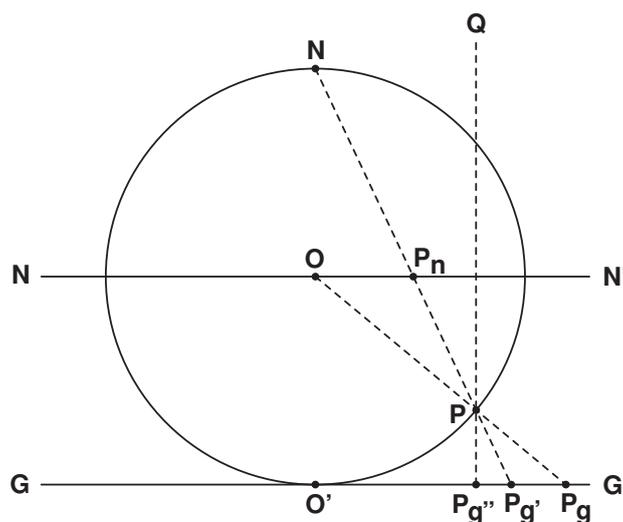
Le proiezioni stereografiche sono facili da usare sia in campagna sia in laboratorio, mediante poche costruzioni è possibile risolvere un gran numero di problemi. La precisione che si può ottenere nelle elaborazioni è minore di  $1^\circ$  e quindi dell'ordine della precisione delle misure che generalmente il geologo riesce a eseguire in campagna. E' inoltre possibile proiettare sullo stesso diagramma un gran numero di misure. Il gran numero di dati permette interpretazioni statistiche con elevato grado di precisione. Non si deve dimenticare però che le proiezioni stereografiche consentono di analizzare le relazioni angolari tra gli elementi geometrici (piani e linee), ma non danno indicazioni sulla loro distribuzione spaziale.

### 1.2 Tipi di proiezione

I vari tipi di proiezione che possono essere usati per rappresentare in due dimensioni una superficie sferica possono essere raggruppati, in base all'orientazione del piano di proiezione rispetto alla sfera di riferimento, in:

- a) proiezioni zenitali (o azimutali);
- b) proiezioni cilindriche;
- c) proiezioni coniche.

Nelle proiezioni zenitali il piano di proiezione è una superficie piana tangente la sfera di riferimento, nelle proiezioni cilindriche il piano di proiezione è una superficie cilindrica tangente la sfera di riferimento, nelle proiezioni coniche il piano di proiezione è una superficie conica tangente la sfera di



**Figura 1.1** Differenze tra la proiezione gnomonica ( $P_g$ ), stereografica ( $P_{g'}$ ) e ortografica ( $P_{g''}$ ) del punto P.  $P_n$  è la proiezione stereografica del punto P all'interno della sfera di riferimento.

riferimento. In geologia vengono comunemente usate solo le proiezioni zenitali ed è di questa classe di proiezioni che ci occuperemo in seguito.

Nelle proiezioni zenitali i punti sulla sfera di riferimento sono proiettati sul piano di proiezione secondo delle linee rette che possono originarsi da un punto di proiezione posto al centro della sfera di proiezione, oppure posto sul punto più alto della sfera di proiezione, oppure ad una distanza infinita rispetto alla sfera di proiezione. La differente posizione del punto di proiezione rispetto alla sfera di proiezione porta quindi ad un'ulteriore suddivisione delle proiezioni zenitali, che possono essere distinte su queste basi in proiezioni gnomoniche, proiezioni stereografiche e proiezioni ortografiche.

La Fig. 1.1 rappresenta una sezione verticale attraverso una sfera passante per il suo centro O. P è un punto sulla sfera, GG' rappresenta il piano di proiezione, tangente alla sfera nel suo punto inferiore (punto O'), NN' è il piano orizzontale che passa per il centro della sfera.

Se proiettiamo il punto P dal centro O sul piano GG' si ottiene il punto  $P_g$ , che rappresenta la proiezione gnomonica del punto P; se proiettiamo invece il punto P dal punto N (punto superiore della sfera) sul piano GG' si ottiene il punto  $P_{g'}$ , che è la proiezione stereografica del punto P. Se si proietta il punto P sul piano GG' da un punto Q posto a una distanza infinita al di sopra della sfera si ottiene il punto  $P_{g''}$ , che rappresenta la proiezione ortografica del punto P.

Le proiezioni zenitali viste finora sono dette anche proiezioni dirette, in quanto un punto viene proiettato sul piano di proiezione secondo delle linee rette. Esistono anche molti esempi di proiezioni indirette, in cui un punto viene proiettato sul piano di proiezione non mediante linee rette, ma secondo delle funzioni matematiche. La proiezione equiarea, un tipo di proiezione che vedremo in seguito, ne è un esempio.

I differenti principi di proiezione per le proiezioni gnomoniche, stereografiche e ortografiche fanno sì che il solito punto (es. il punto P in Fig. 1.1) venga proiettato a distanze diverse rispetto al centro del piano di proiezione (O' in Fig. 1.1) a seconda se si utilizzi la proiezione gnomonica, stereografica o ortografica. Questo significa che le diverse proiezioni zenitali avranno differenti dimensioni, anche se si utilizza la stessa sfera di riferimento.

Se si vogliono confrontare tra loro diverse proiezioni zenitali può essere utile rappresentarle entrambe del solito diametro, che potrebbe essere quello, per esempio, della sfera di riferimento. Si tratta solo di un problema di scala, semplicemente risolvibile riducendo proporzionalmente le dimensioni delle proiezioni. Nel caso particolare della proiezione stereografica ridurre le dimensioni della proiezione fino a farla coincidere con il diametro della sfera di riferimento equivale a proiettare il punto P di Fig. 1.1 non sul piano tangente alla sfera, ma su un piano che passa per il centro della sfera di proiezione. Su questo piano la proiezione stereografica del punto P è il punto  $P_n$ .

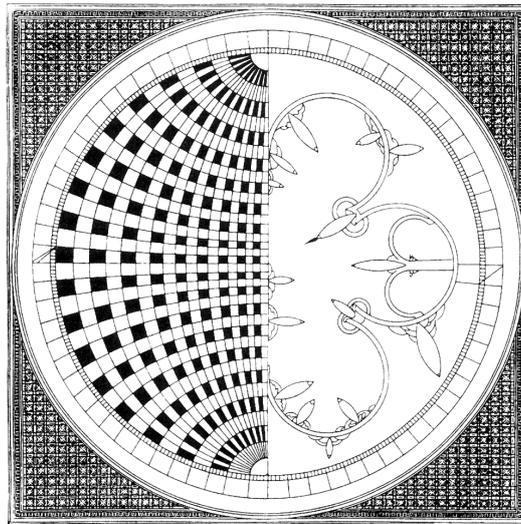


Figura 1.2 Astrolabio di al-Zarquálá (circa 1070 d.C.). L'astrolabio è rappresentato nella parte sinistra, mentre a destra sono indicate le posizioni delle stelle sulla volta celeste.

### 1.3 Storia e applicazioni delle proiezioni stereografiche

Le proiezioni stereografiche furono introdotte dal greco Ipparco (180-125 a.C.), astronomo che introdusse le basi della trigonometria piana e sferica. La prima pratica applicazione delle proiezioni stereografiche fu quella dell'astrolabio (Fig. 1.2). Gli astrolabi permettevano la conoscenza dell'ora, della lunghezza del giorno e della notte, della posizione del sole e delle stelle nel cielo, della latitudine, permettevano la conoscenza dell'altitudine di una montagna o l'altezza di un oggetto, ecc. Ebbero un'ampia diffusione e uso a partire dal II secolo d.C. in Grecia e in Egitto nel III e IV secolo d.C.. A partire dal IX secolo la dominazione araba in Spagna portò l'uso dell'astrolabio in Europa, ove si diffuse a partire dal XIII secolo fino alla fine del XVII secolo.

La navigazione fece ampio uso delle proiezioni stereografiche. Proiezioni stereografiche vennero usate per la rappresentazione cartografica di ampie porzioni del globo terrestre in quanto, a differenza delle proiezioni ortografiche o gnomoniche, vi è una minore distorsione nelle regioni periferiche della carta. Le varie proprietà delle proiezioni stereografiche erano ben note ai cartografi:

- a) ogni cerchio sulla sfera è un cerchio nel piano di proiezione;
- b) ogni cerchio sulla sfera perpendicolare al piano equatoriale di proiezione è un retta nel piano di proiezione;
- c) l'angolo tra due cerchi sulla sfera e l'angolo che le proiezioni dei due cerchi fanno nel piano di proiezione sono uguali.

Le due prime proprietà erano già note dall'antichità mentre la dimostrazione della terza è attribuita a Edmond Halley [12].

#### 1.3.1 Cartografia

Il primo uso di proiezioni stereografiche per la realizzazione di carte geografiche è attribuita a Gaultier Laud (1448-1527) di St. Die in Lorena che nel 1507 diede alle stampe una mappa del globo terrestre basata su una proiezione stereografica polare, la prima carta geografica basata su una proiezione stereografica equatoriale è invece quella realizzata nel 1542 da Jean Rotz (1534- 1560), idrografo alla corte di Enrico VIII d'Inghilterra. Fu nel 1533 il cartografo fiammingo Gemma Frisus (1508-1555) che dimostrò i vantaggi dell'uso contemporaneo di astrolabi durante viaggi e la realizzazione di carte geografiche basate su proiezioni stereografiche. Da questo punto in avanti le tecniche di triangolazione con bussola durante i viaggi, uso di astrolabi e costruzione di carte geografiche ebbe un notevole impulso, soprattutto da parte di Mercatore (1546-1599).

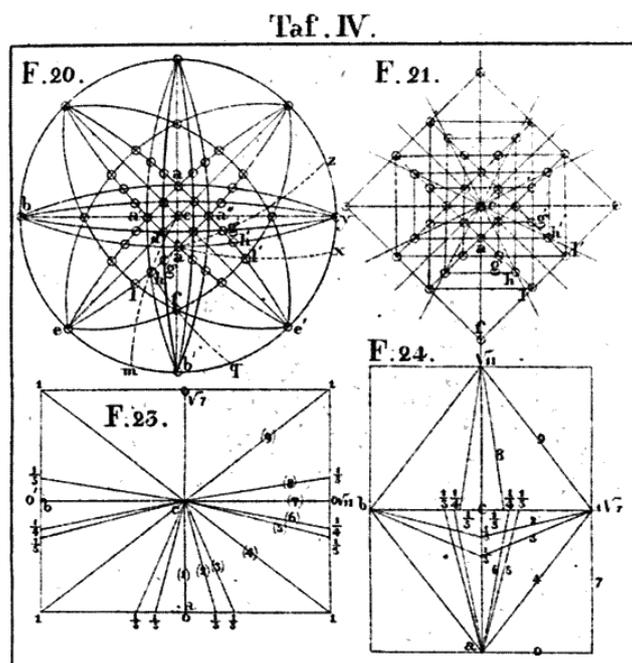


Figura 1.3 Prima pubblicazione di una proiezione stereografica in geologia [26].

La misurazione esatta della superficie terrestre non era comunque una priorità nel mondo medievale, di conseguenza le varie applicazioni della matematica rimasero confinate ai campi dell'astronomia, della fisica e della meccanica, escludendo quasi del tutto la cartografia. Solo con l'affermazione di Newton che la Terra doveva avere la forma di uno sferoide oblatò ripartì l'interesse dei cartografi nel misurare la forma della superficie terrestre con la massima accuratezza. L'uso del telescopio e dei nuovi metodi di triangolazione portarono ad un notevole incremento delle conoscenze, ma fu solo con l'inizio del XIX secolo che la cartografia ebbe solide basi matematiche.

### 1.3.2 Mineralogia

Il notevole impulso che ebbe la mineralogia è strettamente legato alla progressiva industrializzazione del XVIII secolo, questa incoraggiò lo sviluppo di tecniche metallurgiche e di lavorazione dei minerali, ma notevole impulso venne dato allo studio dei minerali, in modo che questi potessero essere facilmente riconosciuti in campagna e il valore economico di un giacimento potesse essere esattamente valutato. Sono quindi di fondamentale importanza a questo punto studi sulla natura dei minerali e una loro descrizione esatta, cioè una descrizione delle loro facce regolari e dei vari piani e assi cristallografici di simmetria. La nascita della mineralogia come scienza segue la classificazione dei minerali sulla base della loro forma esterna e degli angoli tra le facce, facendo uso degli indici cristallografici.

Il mineralogista Franz Ernst Neumann fu il primo a fare uso di proiezioni stereografiche in geologia. In un suo trattato del 1823 [26] comparvero per la prima volta delle proiezioni stereografiche, sebbene ancora costruite graficamente con goniometro e righello e non facendo uso di un reticolo stereografico (Fig. 1.3).

Successivamente molti furono i lavori in cui si rappresentarono le forme dei minerali mediante proiezioni stereografiche. Nel 1867 il mineralogista finlandese Alex Gadolin riconobbe che cristalli con gli stessi elementi di simmetria dovevano appartenere alla solita classe cristallografica, egli illustrò le possibili classi cristallografiche mediante proiezioni stereografiche. Successivi fondamentali trattati come quello di Mallard del 1879 [23] definitivamente stabilirono l'importanza di rappresentare le classi cristallografiche usando proiezioni stereografiche.

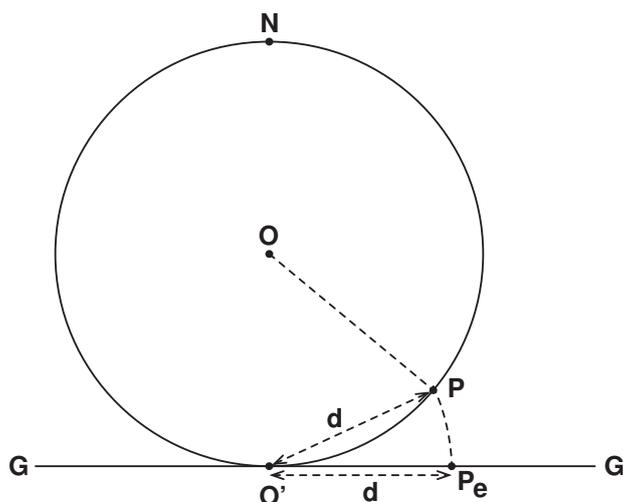


Figura 1.4 Principio della proiezione equiarea di Lambert.  $P_e$  è la proiezione equiarea del punto P.

**Il reticolo stereografico** La prima pubblicazione di un reticolo stereografico polare ed equatoriale del diametro di 6 cm si deve al cristallografo russo Evgraf Stephanivic Fedorov in un lavoro del 1892 sull'uso del tavolino universale [6], che egli personalmente inventò. Il microscopio con tavolino universale permetteva la misura esatta degli angoli tra le facce di un cristallo, ma soprattutto la misura dell'orientazione dell'indicatrice ottica rispetto alle direzioni cristallografiche. Queste informazioni diagnostiche sulla natura e composizione di un cristallo potevano essere utilmente riportate facendo uso di un reticolo stereografico. Fedorov successivamente pubblicò un reticolo con diametro di 20 cm [7] che ebbe ampia immediata diffusione e venne usato da molti mineralogisti e cristallografi. Il mineralogista russo Georgii Wulff adottò i metodi di rappresentazione stereografica proposti da Fedorov e in un lavoro del 1902 [41] pubblicò una versione modificata del reticolo stereografico pubblicato da Fedorov, un reticolo con diametro di 20 cm e una maglia con intervallo di  $2^\circ$ . Un reticolo con un intervallo di  $2^\circ$  si rivelò particolarmente utile, venne immediatamente ampiamente riprodotto e diffuso, a tal punto che il reticolo stereografico oggi più usato in geologia è noto come *Reticolo di Wulff*.

## 1.4 Proiezioni zenitali equiarea

Nel 1772 il matematico svizzero Heinrich Lambert incluse nel suo trattato sulle possibili applicazioni della matematica [20] molti nuovi tipi di proiezioni zenitali, tra cui una che ha la proprietà di mantenere proporzionalmente le dimensioni di ogni regione della superficie terrestre, cioè aree uguali sulla sfera originale rimangono uguali anche sul piano di proiezione, successivamente nota come *proiezione equiarea*.

Il principio di proiezione è illustrato in Fig. 1.4. Un punto P sulla sfera non viene proiettato mediante linee rette sul piano di proiezione, ma secondo un arco di cerchio di raggio  $d$  centrato nel punto di tangenza  $O'$ . A rigore la proiezione equiarea non appartiene quindi alla famiglia delle proiezioni stereografiche, ma come già detto in precedenza è una proiezione indiretta, cioè costruita matematicamente. La costruzione grafica del reticolo equatoriale di Lambert è più complessa [37] di quella del reticolo stereografico.

L'introduzione e la diffusione di questo tipo di proiezione equiarea in geologia è dovuta a due mineralogisti e petrografi austriaci, Walter Schmidt e Bruno Sander. All'inizio del 1900 Walter Schmidt iniziò studi petrografici misurando gli angoli tra gli assi ottici di cristalli uniassici (quarzo e calcite) e l'orientazione della scistosità, usando il tavolino universale introdotto qualche anno prima da Fedorov. Le orientazioni degli assi ottici misurati dovevano quindi essere elaborate statisticamente e a questo punto la proiezione equiarea di Lambert si rivelò di fondamentale aiuto. Schmidt introdusse nel 1925

[34] un reticolo stereografico basato sulla proiezione equatoriale di Lambert, su questo reticolo egli riportò le orientazioni degli assi cristallografici misurati in ogni sezione sottile (circa 400-500 punti) e usando una maglia di 1 cm<sup>2</sup> su carta trasparente da sovrapporsi al reticolo, riuscì a tracciare linee che delimitano aree con uguale densità di punti. Il reticolo equiarea introdotto è oggi comunemente noto come *Reticolo di Schmidt*. La tecnica di tracciare linee che rappresentano aree con uguale densità di punti (analisi statistica) è stata successivamente raffinata da Oskar Schmidegg e Otto Mellis [24].

Già dal 1926 Sander adottò il reticolo stereografico equiarea di Schmidt per rappresentare dati su rocce deformate. Il suo libro del 1930 "*Gefügekunde der Gesteine*" [33] introdusse un nuovo approccio nello studio di rocce metamorfiche, combinando informazioni di carattere geologicostrutturale mesoscopiche (giacitura di assi, crenulazioni, foliazione, ecc.) con gli aspetti microstrutturali della roccia (orientazioni preferenziali della forma dei grani, orientazioni cristallografiche preferenziali, ecc.), il libro ebbe un'ampia diffusione e tradotto immediatamente in tutto il mondo stabilì la nascita come scienza dell'analisi del fabric delle rocce metamorfiche. In questo libro Sander fece ampio uso di reticoli equiarea di Schmidt che di conseguenza divennero lo standard nell'analisi microstrutturale, anche a seguito del riconoscimento di questi metodi di analisi da parte di geologi di lingua inglese e della loro introduzione in vari libri e pubblicazioni di geologia strutturale negli anni 1930-1940 [17, 11, 18, 13, 5] e più limitatamente in lavori di sedimentologia [32, 19].

Negli anni successivi lo sviluppo della moderna geologia strutturale portò ad integrare le osservazioni microstrutturali di rocce deformate con l'analisi statistica di elementi quali scistosità, assi di pieghe, lineazioni di estensione, lineazioni di intersezioni, crenulazioni, giunti di fratturazione, ecc., per una descrizione della geometria di pieghe e sovrascorrimenti. Il primo libro di geologia strutturale che discusse in modo completo l'analisi statistica di questi elementi mediante il reticolo di Schmidt fu quello di Billings nel 1942 [2] e negli anni '60 l'analisi statistica quantitativa basata su dati di campagna [38, 31] portò alla definitiva affermazione del reticolo equiarea di Schmidt in geologia strutturale.

## Capitolo 2

# Misura di piani e linee

### 2.1 Misura di strutture planari

La maggior parte delle rocce mostra in affioramento vari tipi di strutture planari. In rocce sedimentarie la più comune è la stratificazione, evidenziata da variazioni composizionali, tessiturali o granulometriche, che può essere presente anche in rocce ignee. In rocce metamorfiche sono presenti vari tipi di foliazioni, come clivaggio e scistosità, legate a processi deformativi e metamorfici. Altre strutture planari che possono essere presenti vari tipi di rocce sono i giunti, fratture lungo cui non si hanno indizi di movimento, e le faglie, fratture con movimento relativo delle due parti.

Tutte queste strutture planari possono venire misurate in affioramento misurando con la bussola *direzione di immersione* (o *immersione*) del piano e *l'inclinazione* del piano. La direzione di immersione è l'angolo, misurato in senso orario, tra il Nord geografico e il piano verticale che contiene la direzione di massima pendenza di un piano, questo angolo è indicato con  $\alpha$  in Fig. 2.1a e varia da  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . L'inclinazione è l'angolo che la direzione di massima pendenza di un piano fa con l'orizzontale e varia tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . Solitamente la giacitura o orientazione di un piano si indica con una coppia di valori angolari, di cui il primo è la direzione di immersione e il secondo l'inclinazione (es. 78/25, 125/34, 247/68, 355/8).

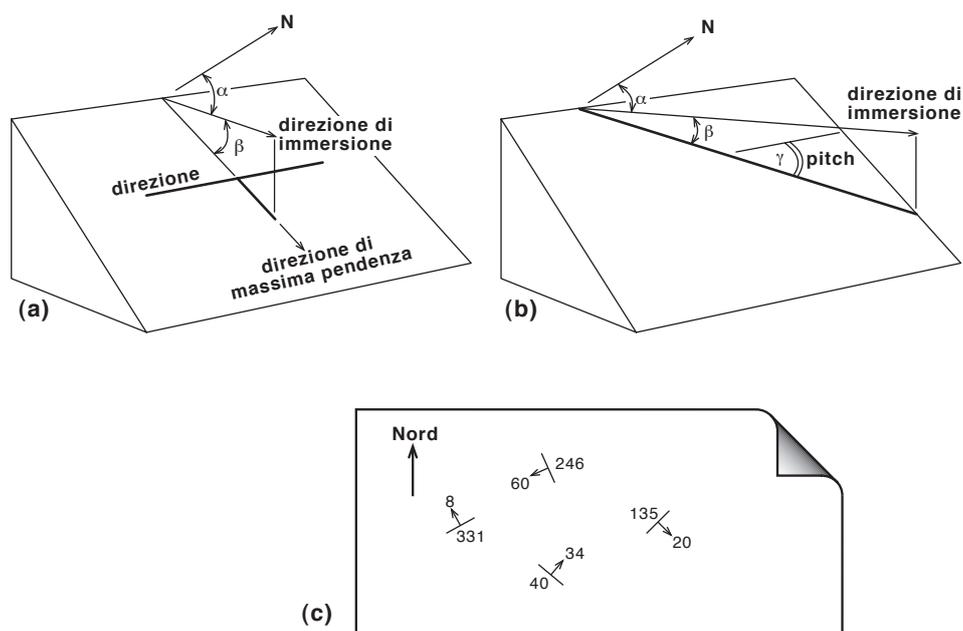
Questa è la convenzione usata in questi appunti, ma esistono molte altre notazioni per indicare la giacitura di un piano, per esempio può essere indicata la *direzione*, cioè l'angolo che l'unica linea orizzontale presente sul piano fa rispetto al Nord e il valore angolare dell'inclinazione, con il punto cardinale verso cui immerge il piano (es. N135E 68SW). È importante ricordare quindi che "direzione" è nettamente diverso da "direzione di immersione", queste due direzioni fanno tra loro un angolo di  $90^\circ$ .

Per indicare la direzione (*strike*) di un piano, non la direzione di immersione, si usa riportare l'angolo che la direzione fa rispetto al Nord, indicando se questo angolo è misurato verso E o verso W (es. N120E, N070W, ecc). I valori di direzione variano da  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .

### 2.2 Misura di strutture lineari

In molte rocce sono riconoscibili strutture lineari, che possono essere di origine sedimentaria o tettonica. Alle strutture lineari di origine sedimentaria appartengono i *flute cast*, l'allineamento di linee di cresta di *ripple mark*, ecc. Lineazioni di origine tettonica sono molto comuni in rocce metamorfiche, le più comuni sono lineazione di estensione, lineazioni mineralogiche, crenulazione, lineazioni di intersezione, assi di pieghe, strie di faglia, ecc.

Un elemento lineare viene misurato con la bussola misurando la direzione di immersione e l'inclinazione della linea. L'immersione di una linea è l'angolo (angolo  $\alpha$  in Fig. 2.1b) che fa il piano verticale che contiene la linea rispetto al Nord, misurato in senso orario e varia da  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . L'inclinazione è l'angolo che la linea fa rispetto all'orizzontale e varia tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . Analogamente con quanto visto per i



**Figura 2.1** (a) Direzione di immersione ( $\alpha$ ) e inclinazione ( $\beta$ ) di un piano. (b) Direzione di immersione ( $\alpha$ ), inclinazione ( $\beta$ ) e *pitch* ( $\gamma$ ) di una linea. (c) Misure in una carta geologica riportate con la convenzione “direzione di immersione/inclinazione”. Generalmente in prossimità della punta della freccia si riporta il valore di inclinazione.

piani la misura di una linea si indica con una coppia di valori angolari, di cui il primo è la direzione di immersione e il secondo l’inclinazione (es. 40/20, 120/64, 244/55, 302/6).

Quando in affioramento è presente una lineazione con un’inclinazione elevata ( $>70^\circ$ ) è molto facile essere imprecisi con la bussola nell’individuare il piano verticale che la contiene e perciò può essere commesso un errore notevole nella misura della direzione. In questo caso può essere agevole usare un modo alternativo per indicare la giacitura di una linea, mediante la misura del del piano che la contiene e del *pitch*. In pratica si misura la superficie (stratificazione, foliazione, piano di faglia, ecc.) su cui è presente la lineazione come un qualsiasi piano e sempre su questa superficie si misura l’angolo, detto *pitch*, che la linea fa con l’orizzontale (angolo  $\gamma$  in Fig. 2.1b). In questo modo la lineazione non è definita da due valori angolari (es. 230/48), ma dalla misura del piano e dal valore angolare del *pitch*, accompagnato dall’indicazione del punto cardinale verso cui si misura il *pitch* cioè della direzione verso cui immerge la linea (es. 125/32 pitch 20°SE).

## Capitolo 3

# Principi di proiezione

Le proiezioni planosferiche semplificano le soluzioni grafiche di problemi che implicano le orientazioni relative di linee e piani nello spazio e permettono di rappresentare facilmente in due dimensioni l'orientazione nello spazio di linee e piani. Esse costituiscono uno strumento insostituibile per risolvere in maniera semplice problemi tridimensionali.

Con questo metodo è possibile ricavare relazioni angolari tra piani, tra linee e tra piani e linee, ma non la loro posizione nello spazio, che deve necessariamente essere affidata ad una rappresentazione su base topografica. Molte pubblicazioni di Geologia strutturale, Cristallografia e Meccanica delle rocce descrivono la soluzione di un gran numero di problemi per mezzo di proiezioni stereografiche. Varie pubblicazioni sono disponibili sull'argomento.

Negli esempi che seguono sono illustrate proiezioni stereografiche che utilizzano la semisfera di proiezione inferiore, questa è la semisfera comunemente utilizzata in geologia anche se in alcuni casi viene usata quella superiore.

### 3.1 Proiezione di linee

La Fig. 3.1a mostra una lineazione osservata in affioramento, dove si è misurata la sua direzione di immersione rispetto al Nord e la sua inclinazione. Immaginiamo di trasportare la linea, con la stessa orientazione, al centro di una sfera detta *sfera di proiezione* (Fig. 3.1c), la linea intersecherà la semisfera inferiore nel punto P, detto *proiezione sferica della linea*. Congiungiamo ora con una retta il punto P con il punto più alto (zenith) della sfera di proiezione, detto *fuoco* (F in Fig. 3.1e), questa retta interseca il piano orizzontale passante per il centro della sfera (*piano di proiezione*) in un punto (P') che è la *proiezione stereografica* della linea (Fig. 3.1g). L'intersezione tra la sfera di proiezione e il piano di proiezione è detto *cerchio di riferimento* o *cerchio primitivo*. La proiezione stereografica di una linea è quindi un punto all'interno del cerchio primitivo, una linea orizzontale è rappresentata da un punto sul cerchio di riferimento, mentre una linea verticale è un punto al centro del cerchio di riferimento.

### 3.2 Proiezione di piani

La Fig. 3.1b mostra un piano in affioramento. Immaginiamo di trasportare il piano, con la stessa orientazione, al centro della sfera di proiezione (Fig. 3.1d), il piano intersecherà la sfera di proiezione individuando un cerchio che è la *proiezione sferica* del piano. Congiungendo con una retta ciascun punto della proiezione sferica nell'emisfero inferiore con il fuoco F, cioè il punto più alto della sfera di proiezione (Fig. 3.1f) si ottiene sul piano di proiezione orizzontale un arco di cerchio che rappresenta la *proiezione stereografica* del piano (Fig. 3.1f) anche detto *grande cerchio* o *traccia ciclografica* del piano.

La proiezione di un piano orizzontale è un cerchio che coincide con il cerchio di intersezione tra la sfera di proiezione e il piano di proiezione (*cerchio di riferimento* o *cerchio primitivo*), la proiezione di un piano verticale è una retta che passa per il centro del cerchio di riferimento. La traccia ciclografica di

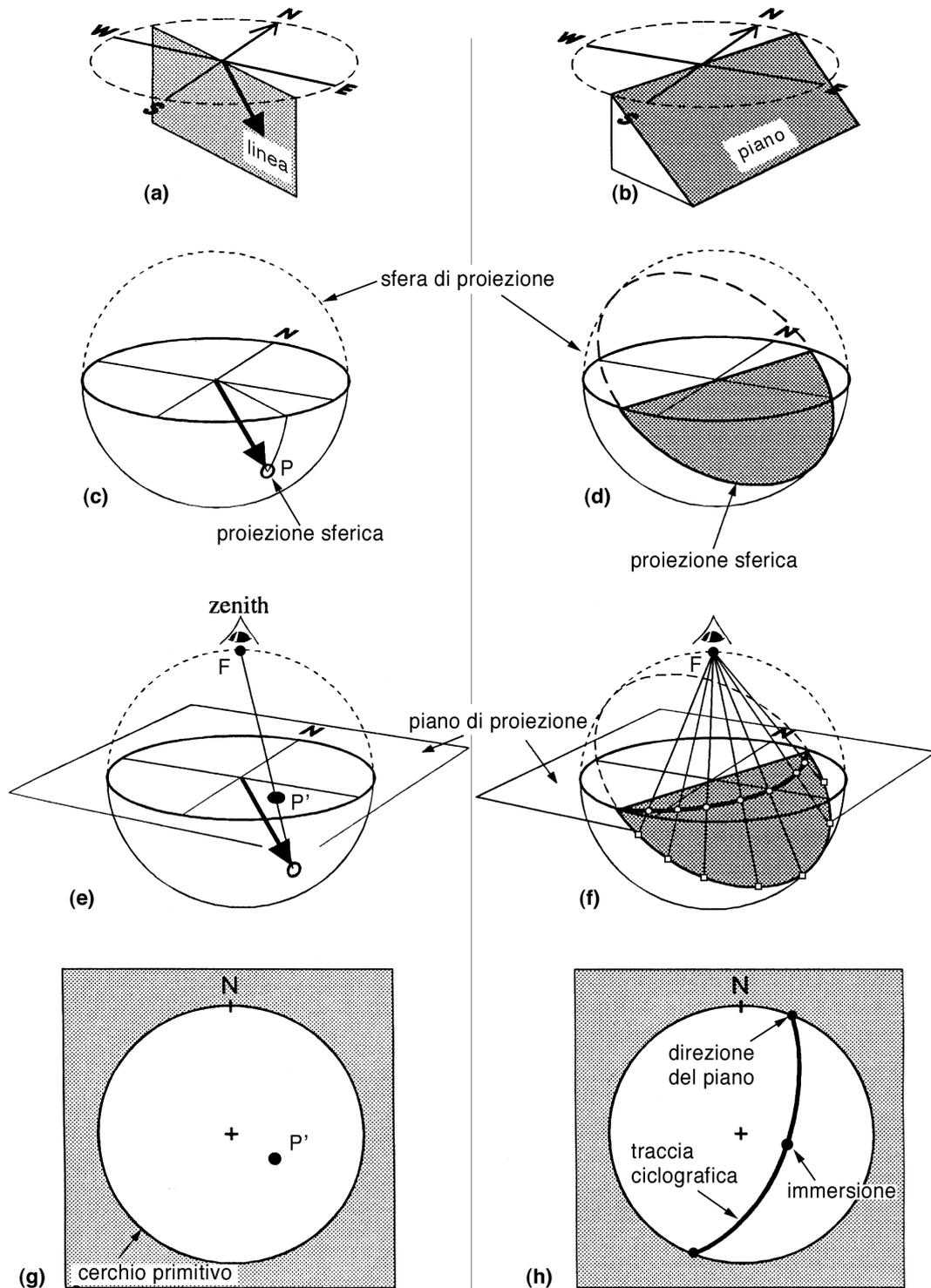


Figura 3.1 Principi di proiezione stereografica di linee e piani.

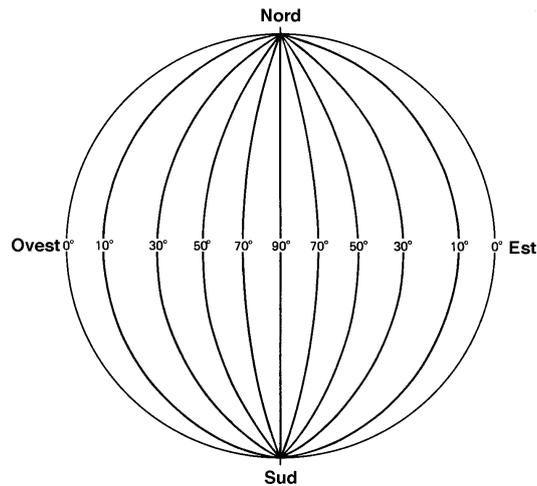


Figura 3.2 Proiezioni stereografiche di una serie di piani con direzione N-S, immergenti verso E e verso W.

un piano interseca il cerchio di riferimento in due punti che rappresentano la *direzione* del piano e avrà la convessità rivolta verso la *direzione di immersione* del piano. La distanza tra la traccia ciclografica e il centro del cerchio di riferimento è funzione dell'inclinazione del piano.

In Fig. 3.2 sono riportate le tracce ciclografiche che rappresentano vari piani, tutti con la stessa direzione, ma con inclinazione e immersione differente, questi archi di cerchio sono del tutto analoghi alla proiezione stereografica dei meridiani della superficie terrestre.

### 3.3 Proiezione di coni

Un cono è il luogo geometrico dei punti che fanno un angolo costante  $\alpha$  (Fig. 3.3a) con una linea. Consideriamo un doppio cono con asse orizzontale e trasliamolo in modo tale che l'apice dei due coni coincida con il centro della sfera di proiezione (Fig. 3.3b), l'intersezione dei coni con la sfera di proiezione definisce due cerchi (*proiezione sferica dei coni*, Fig. 3.3b). Congiungendo con una retta ciascun punto della proiezione sferica nell'emisfero inferiore con il fuoco F si ottiene sul piano di proiezione orizzontale due archi di cerchio che rappresentano la *proiezione stereografica* dei coni (Fig. 3.3c). Gli archi di cerchio così costruiti sono detti *piccoli cerchi* e sono simmetrici rispetto al centro del cerchio di proiezione se l'asse dei coni è orizzontale.

Se l'asse della coppia di coni invece di essere orizzontale è inclinato verticalmente di un angolo maggiore di  $\alpha$ , usando come sfera di proiezione sempre la semisfera inferiore, in proiezione stereografica non si ottengono due piccoli cerchi ma una circonferenza (o un'ellisse) all'interno del cerchio di riferimento (Fig. 3.3d). Se i coni hanno l'asse verticale la circonferenza è concentrica con il cerchio principale.

E' importante notare che piccoli cerchi in una proiezione stereografica non sono esclusivamente il risultato dell'intersezione di un cono con la sfera di proiezione, ma possono essere originati anche dall'intersezione della sfera di proiezione con un piano che non passa per il centro della sfera di proiezione stessa.

### 3.4 Proiezioni equiangolari ed equiarea

Finora precedente abbiamo visto i principi generali delle proiezioni stereografiche, in questo capitolo vediamo invece come calcolare la proiezione stereografica di una linea e come calcolare la traccia ciclografica di un piano in proiezione stereografica

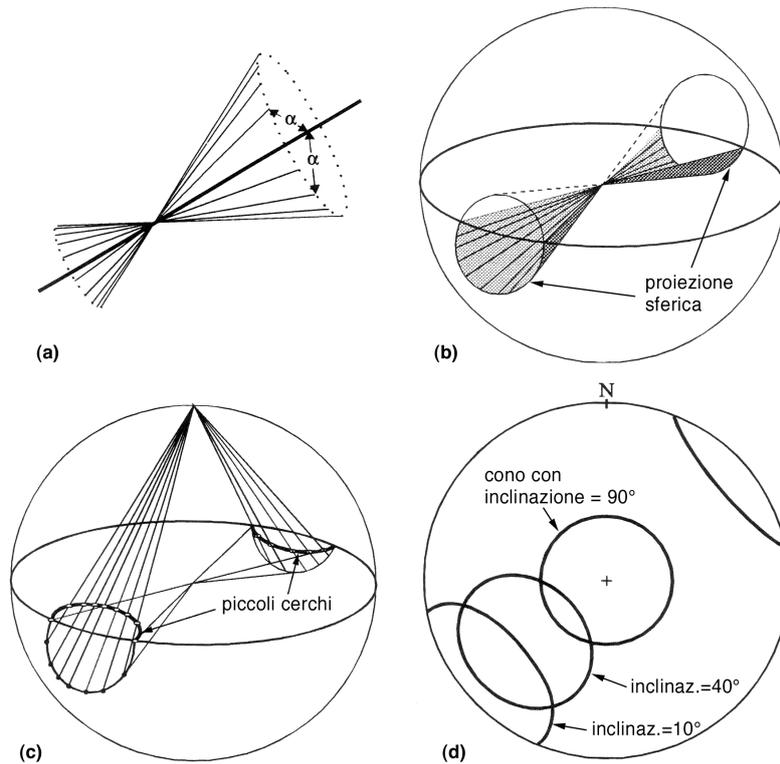


Figura 3.3 Principi di proiezione di un cono.

### 3.4.1 Proiezione di una linea

Qualsiasi metodo di proiezione si usi, una linea in tre dimensioni (Fig. 3.4a) deve essere rappresentata in due dimensioni da un punto all'interno di un'area di proiezione. Nel caso delle proiezioni stereografiche l'area di proiezione è un cerchio, il *cerchio di riferimento* o *cerchio primitivo*, di raggio  $R$  che passa per il centro della sfera di proiezione. Un punto del cerchio di riferimento, solitamente il punto più in alto, rappresenta il Nord geografico, a  $90^\circ$  da questo punto in senso orario è la direzione Est, sempre in senso orario a  $90^\circ$  è la direzione Sud e quindi la direzione Ovest (Fig. 3.4b). La proiezione stereografica di una linea è quindi un punto (punto in Fig. 3.4b) di coordinate polari  $(\alpha, r)$  all'interno del cerchio di riferimento.  $\alpha$  è la direzione del piano verticale che contiene la linea (direzione che viene misurata in affioramento con la bussola) mentre  $r$  è funzione dell'inclinazione della linea e del metodo di proiezione usato.

Un punto sulla sfera di riferimento rappresentante una linea può essere riportato all'interno di un cerchio di riferimento seguendo molti metodi di proiezione. I metodi di proiezione più usati in geologia sono quello della proiezione stereografica (o equiangolare o conforme) e quello della proiezione equiareale (o di Lambert o equivalente), la differenza tra questi due metodi viene illustrata in Fig. 3.5 mediante sezioni verticali attraverso la sfera di proiezione, passanti per il punto  $P$ . La semisfera di proiezione usata è sempre quella inferiore.

La Fig. 3.5a rappresenta il principio della proiezione stereografica equiangolare. Una linea con direzione di immersione  $\alpha$  e inclinazione  $\beta$  intercetta la sfera di proiezione di raggio  $R$  nel punto  $P'$ , questo punto viene proiettato sul piano di proiezione tracciando una retta da  $T$ , punto superiore della sfera di proiezione, a  $P'$ . Il punto  $P$  intersezione tra questa retta e il piano di proiezione è la proiezione stereografica equiangolare della linea. Per questo tipo di proiezione la relazione tra la distanza tra il punto  $P$  e il centro della sfera di proiezione  $O$  e l'inclinazione  $\beta$  è:

$$r = R \tan \left( \frac{90 + \beta}{2} \right) \quad (3.1)$$

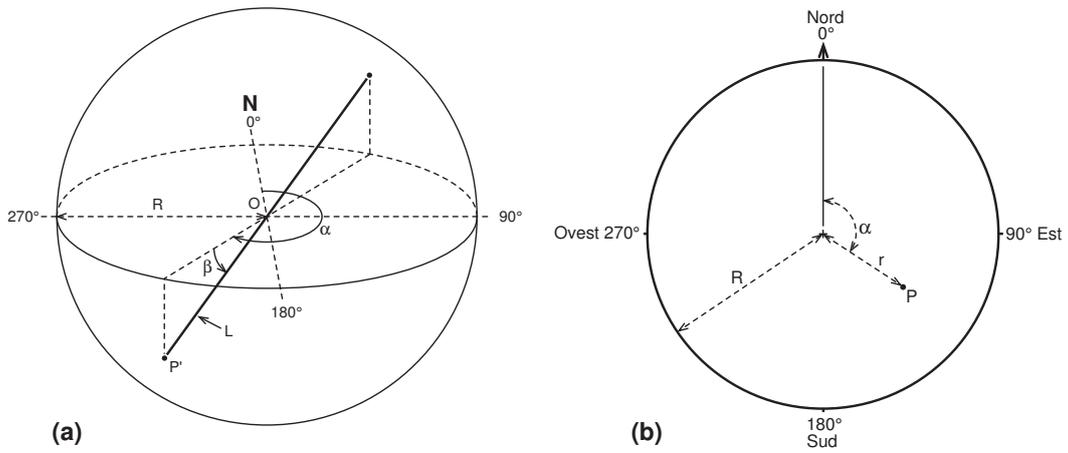


Figura 3.4 (a) Sfera di riferimento intersecata da una linea L con direzione di immersione  $\alpha$  ed inclinazione  $\beta$ . (b) Cerchio di riferimento.

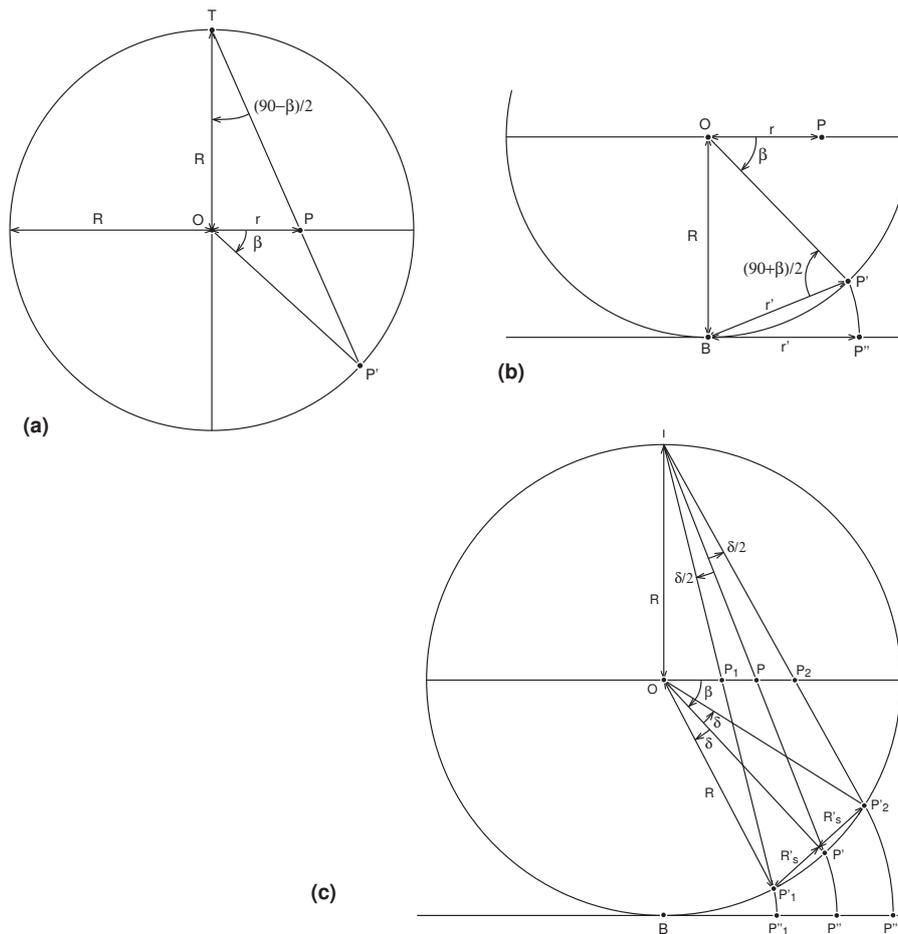


Figura 3.5 Sezioni verticali attraverso la sfera di proiezione illustranti: (a) proiezione equiangolare di un punto e (b) proiezione equiareale di un punto. (c) Proprietà delle proiezioni stereografiche.

La Fig. 3.5b rappresenta il principio della proiezione equiarea (o proiezione di Lambert). Come in precedenza il punto  $P'$  rappresenta l'intersezione di una linea con la sfera di proiezione. Questo punto è proiettato su di un piano orizzontale tangente la sfera nel punto  $B$  usando degli archi di cerchio centrati sul punto  $B$ , la proiezione del punto  $P'$  sul piano orizzontale è il punto  $P''$ . La distanza  $r'$  del punto  $P''$  da  $B$  è

$$r' = 2R \cos\left(\frac{90 + \beta}{2}\right) \quad (3.2)$$

Quando  $\beta = 0$  si ha che:  $r' = 2R \cos 45^\circ = R\sqrt{2}$ . Questo significa che il raggio della proiezione risultante sul piano orizzontale tangente il punto  $B$  è più largo di un fattore  $\sqrt{2}$  pari al raggio del cerchio di riferimento. A questo punto bisogna trasferire il punto  $P''$  all'interno del cerchio di riferimento, nel punto  $P$  ad una distanza  $r$  dal centro del cerchio di riferimento  $O$ . Questo viene fatto ponendo:  $r = r'/\sqrt{2}$  e quindi

$$r = R\sqrt{2} \cos\left(\frac{90 + \beta}{2}\right) \quad (3.3)$$

Il processo di proiezione equiarea sulla semisfera inferiore equivale quindi, semplificando, a togliere la buccia esterna di metà arancia, distenderla su un piano orizzontale e successivamente restringerla fino a farla diventare di raggio  $R$ .

Le differenti proprietà della proiezione equiangolare ed equiarea diventano evidenti se consideriamo una circonferenza di raggi  $R'_S$  centrata sulla linea  $OP'$  che dal centro della sfera di proiezione passa per il punto  $P'$  sulla semisfera di proiezione inferiore (Fig. 3.5c). Se  $R'_S$  è minore di  $R$  la circonferenza è detta *piccolo cerchio* e può essere pensata come l'intersezione con la semisfera di proiezione inferiore di un cono con l'apice nel centro della sfera di proiezione  $O$  e un semiangolo di apertura  $\delta = \arcsin(R'_S/R)$ . È possibile dimostrare che la proiezione equiangolare di un piccolo cerchio è sempre un cerchio; questo cerchio, a parte il caso in cui  $\beta = 90^\circ$ , non è centrato sulla proiezione equiangolare del punto  $P'$ . Il raggio  $R_S$  della proiezione del piccolo cerchio è dato da:

$$R_S = \frac{R \left[ \tan\left(\frac{90-\beta+\delta}{2}\right) - \tan\left(\frac{90-\beta-\delta}{2}\right) \right]}{2} \quad (3.4)$$

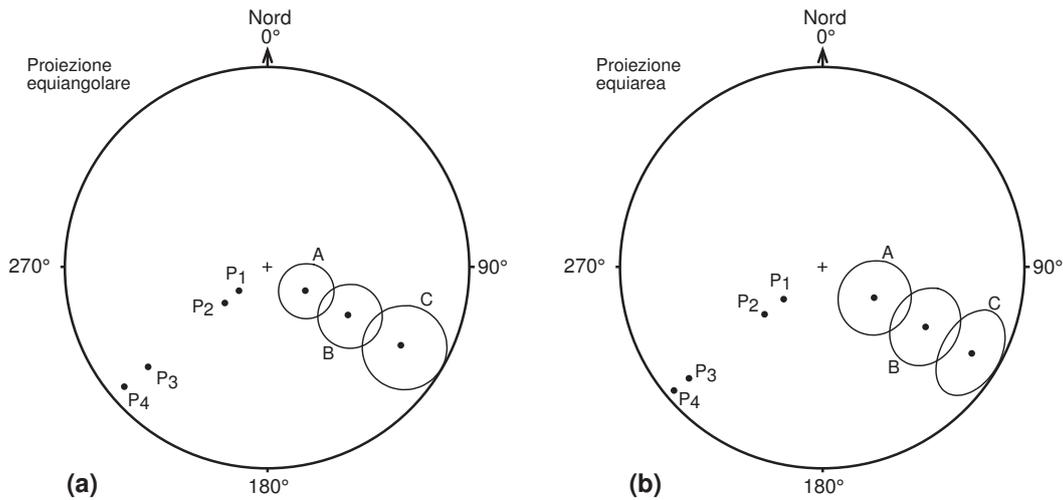
dove  $\delta < 90^\circ + \beta$ .

L'Eq. 3.4 mostra che, per un dato valore di  $\delta$ , il raggio  $R_S$  e quindi l'area del piccolo cerchio diminuisce con l'aumentare dell'inclinazione  $\beta$  della linea  $OP'$  (Fig. 3.6a). Questo significa anche che due linee che formano tra di loro un angolo  $2\delta$  verranno proiettate più vicine tra loro se sono fortemente inclinate rispetto a quanto accadrebbe se fossero poco inclinate o suborizzontali (Fig. 3.6a). Il significato della distorsione nelle proiezioni equiangolari verrà ulteriormente discusso nel Capitolo 6.

È importante rimarcare a questo punto l'esatto significato del termine "equiangolare" (o "conforme"). In Fig. 3.5c le linee  $OP'_1$  e  $P'_2$  si trovano nel solito piano verticale di  $OP'$  e formano un angolo  $2\delta$  con il centro della sfera di proiezione. I punti  $P'_1$  e  $P'_2$  vengono proiettati nei punti  $P_1$  e  $P_2$ , che formano tra loro un angolo  $\delta$  con il punto  $T$ , per qualsiasi inclinazione  $\beta$ . Di conseguenza, per qualsiasi valore di  $\delta$  e di  $\beta$  i punti  $P_1$  e  $P_2$  formeranno sempre un uguale angolo  $\delta$  con il punto sommitale  $T$  sulla sfera di proiezione, da qui il termine "equiangolare".

La caratteristica più importante della proiezione equiareale è invece che l'area di un piccolo cerchio che rappresenta un cono con angolo di apertura  $\delta$  rimane costante pur variando l'inclinazione del cono  $\beta$ . La proiezione equiarea quindi non presenta le distorsioni areali viste per la proiezione equiangolare (Fig. 3.6a), ma introduce necessariamente delle distorsioni nella forma dei piccoli cerchi. Può essere inoltre dimostrato che nel caso della proiezione equiarea i piccoli cerchi assumono la forma non di circonferenze, ma di curve del quarto ordine, eccetto il caso di coni con asse verticale ( $\beta = 90^\circ$ ) la cui proiezione è un cerchio di raggio:

$$R_S = R\sqrt{2} \cos\left(\frac{180 - \delta}{2}\right) \quad (3.5)$$



**Figura 3.6** Proiezioni equiangolari (a) ed equiarea (b) di tre coni con semiangolo di apertura costante  $\delta = 15^\circ$  e inclinazione dell'asse variabile (cono A=120/65, B=120/40, C=120/15). Sono riportate anche le proiezioni di due coppie di linee che formano tra loro un angolo di  $10^\circ$  ( $P_1=230/70$ ,  $P_2=230/60$  e  $P_3=230/15$ ,  $P_4=230/5$ ). Si noti la differente distanza tra le coppie di punti e la differente forma dei piccoli cerchi in funzione dell'inclinazione.

La proiezione stereografica di una linea può essere effettuata in coordinate radiali applicando l'Eq. 3.1, l'Eq. 3.2 e l'Eq. 3.3. Poiché non è molto comodo usare tali equazioni per ogni linea da proiettare, sono stati costruiti dei reticoli che facilitano la procedura di proiezione, detti *reticoli polari* in quanto il loro aspetto è simile a quello del globo terrestre visto da un asse polare con linee simili alla latitudine e alla longitudine. Sui reticoli polari le linee della "longitudine" sono linee radiali che rappresentano direzioni di immersione di linee e sono disegnate solitamente con un intervallo di  $2^\circ$ . Le linee di "latitudine" sono cerchi concentrici il cui raggio può essere calcolato usando l'Eq. 3.1 oppure l'Eq. 3.3: se si usa l'Eq. 3.1 si ottengono dei *reticoli polari equiangolari*, se si usa l'Eq. 3.3 si ottengono dei *reticoli polari equiarea*. Reticoli di proiezione polare equiangolare ed equiarea sono riportati in Appendice a pag. 63, il loro uso verrà illustrato in dettaglio nel Capitolo 4.

Le equazioni viste finora e i reticoli polari di proiezione permettono la proiezione stereografica di linee, mentre non possono essere usati facilmente per la proiezione di piani. Per rappresentare un piano in proiezione stereografica è necessario proiettare l'infinito numero di linee che si trovano sul quel piano, questo viene illustrato di seguito.

### 3.4.2 Proiezione di un piano

La Fig. 3.7a mostra un piano inclinato con direzione di immersione  $\alpha$  e inclinazione  $\beta$ , posizionato in modo tale che passi per il centro  $O$  della sfera di proiezione di raggio  $R$ . Come già illustrato in Fig. 3.1, l'intersezione del piano inclinato con la sfera di proiezione definisce la *proiezione sferica* del piano; la proiezione della proiezione sferica sul piano di proiezione rappresenta la *traccia ciclografica* o *grande cerchio* del piano inclinato.

Il piano inclinato può essere visualizzato come rappresentato da un infinito numero di linee  $OP'_\gamma$  di pitch  $\gamma$  con origine nel punto  $O$ , il centro della sfera di proiezione, che intersecano la sfera di proiezione nel punto  $P'_\gamma$ . La linea con  $\gamma = 0^\circ$  è la direzione del piano, la linea con  $\gamma = 90^\circ$  è la direzione di immersione (o immersione) del piano.

Ogni punto può essere proiettato sul piano di proiezione usando l'Eq. 3.1 (proiezione equiangolare) oppure l'Eq. 3.3 (proiezione equiarea) vista in precedenza, originando una curva che rappresenta la traccia ciclografica o grande cerchio del piano inclinato. Se si usa l'Eq. 3.1 si ottiene una traccia ciclografica che rappresenta la proiezione equiangolare del piano inclinato e che è un arco di cerchio di raggio:

$$R_g = \frac{R}{\cos\beta} \quad (3.6)$$

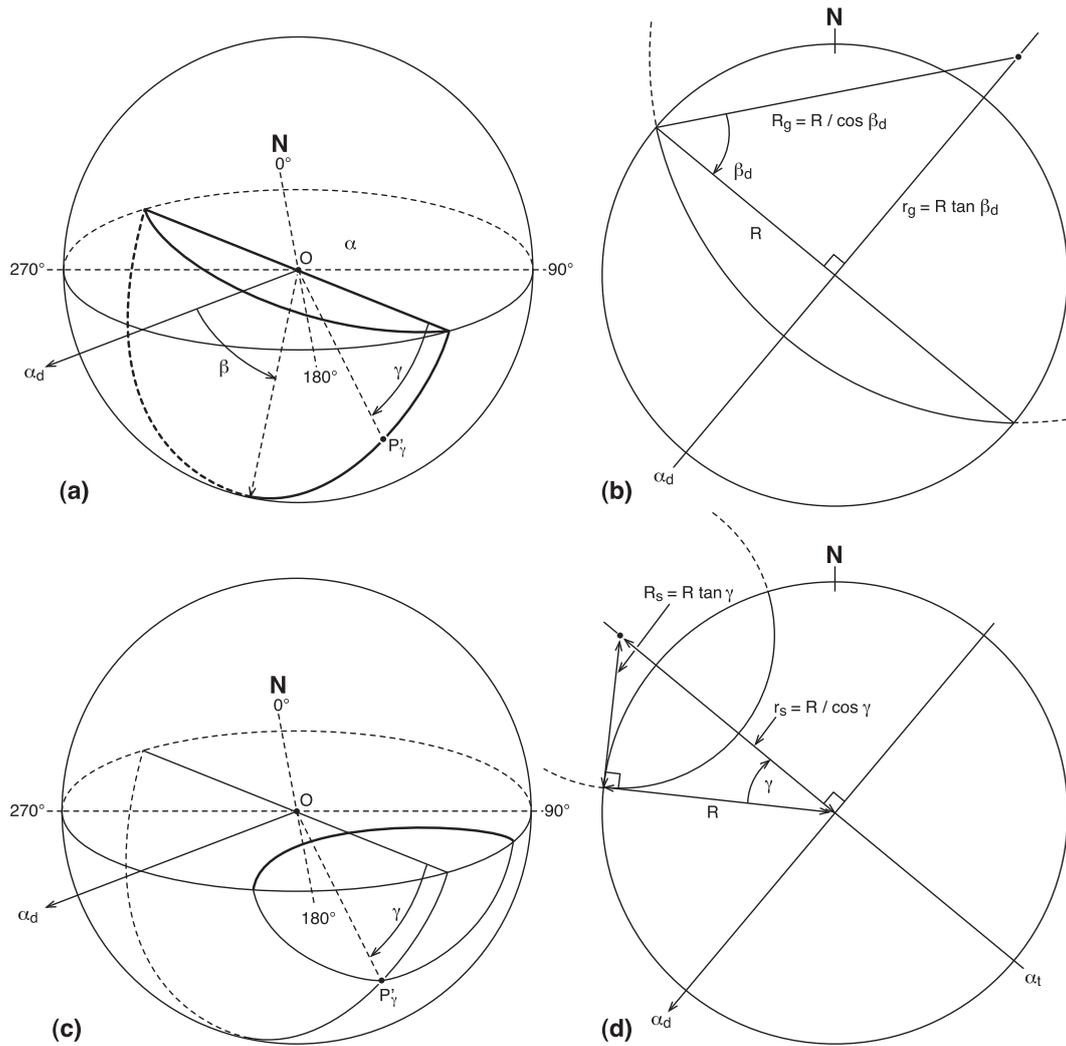


Figura 3.7 (a) Piano inclinato all'interno della semisfera di proiezione inferiore. (b) Costruzione della proiezione equiangolare di un grande cerchio. (c) Definizione di un piccolo cerchio. (d) Costruzione della proiezione equiangolare di un piccolo cerchio.

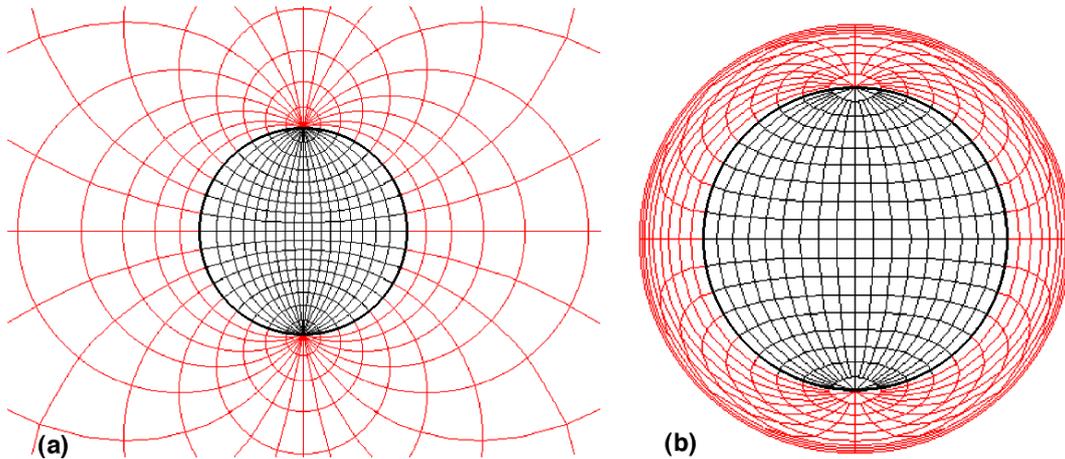


Figura 3.8 Proiezione di grandi e piccoli cerchi anche al di fuori del cerchio di riferimento. (a) Proiezione equiangolare. (b) Proiezione equiareale di Lambert.

e che ha il suo centro ad una distanza

$$r_g = R \tan \beta \quad (3.7)$$

dal centro di proiezione  $O$ , misurata lungo una linea di direzione  $\alpha \pm 180^\circ$ . Questa costruzione è illustrata in Fig. 3.7b. Se si usa l'Eq. 3.3 si ottiene una traccia ciclografica che rappresenta la proiezione equiareale del piano inclinato, che non è un arco di cerchio ma una curva del quarto ordine. Con qualsiasi metodo di proiezione la traccia ciclografica di un piano verticale è una retta che passa per il centro della sfera di proiezione, mentre la proiezione di un piano orizzontale coincide con il cerchio di riferimento. In Fig. 3.8 sono tracciati i grandi cerchi nel caso della proiezione equiangolare ed equiareale.

### 3.4.3 Proiezione di un cono

Consideriamo nuovamente il piano inclinato con direzione di immersione  $\alpha$  e inclinazione  $\beta$ , ma su questo piano consideriamo una sola linea, la linea  $OP'_\gamma$  con inclinazione  $\gamma$  rispetto all'orizzontale (Fig. 3.7c). Immaginiamo ora di ruotare liberamente il piano inclinato attorno alla sua direzione, durante questo movimento la linea  $OP'_\gamma$  tratterà sulla sfera di proiezione un arco di cerchio che potrà essere proiettato sul piano di proiezione come un piccolo cerchio utilizzando la proiezione equiangolare (Eq. 3.1), oppure la proiezione equiareale (Eq. 3.3). Se si usa la proiezione equiangolare, la proiezione di un piccolo cerchio generata da una linea con *pitch*  $\gamma$  su di un piano con direzione di immersione  $\alpha$  è un arco di cerchio di raggio:

$$R_s = R \tan \gamma \quad (3.8)$$

che ha il suo centro ad una distanza:

$$r_s = \frac{R}{\cos \gamma} \quad (3.9)$$

dal centro di proiezione  $O$ , misurata lungo una linea di direzione  $\alpha \pm 90^\circ$ . Questa costruzione è illustrata in Fig. 3.7d. Se si usa la proiezione equiareale la costruzione è molto più complicata in quanto i piccoli cerchi risultanti sono archi di cerchio, ma curve del quarto ordine. Qualsiasi proiezione si scelga, la proprietà principale dei piccoli cerchi è che essi descrivono la variazione di orientazione di una linea quando è ruotata attorno ad un asse, in Fig. 3.7d l'asse di rotazione è orizzontale. Questa proprietà è molto importante e verrà utilizzata diffusamente più avanti (vedi Capitolo 5.10 a pagina 42).

Comunemente non è molto pratico usare le costruzioni di Fig. 3.7 per proiettare grandi cerchi e piccoli cerchi in proiezione stereografica, per semplificare le procedure di proiezione sono stati costruiti dei reticoli in cui sono disegnati grandi cerchi e piccoli cerchi, questi reticoli sono detti reticoli di proiezione equatoriale e possono essere costruiti usando la proiezione equiangolare oppure

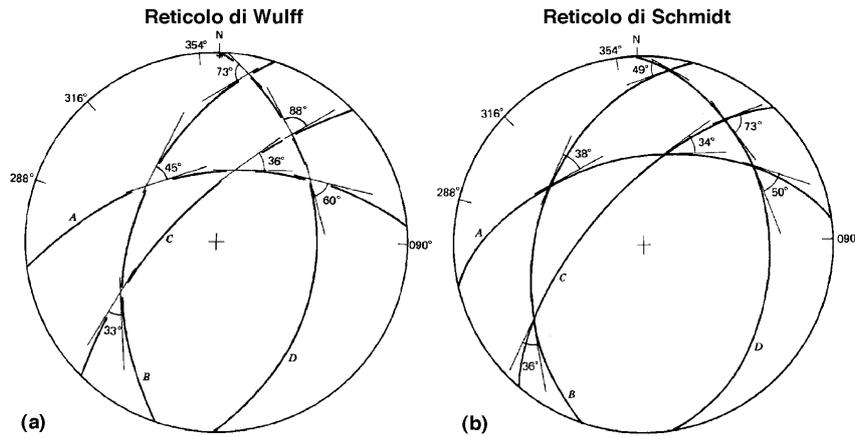


Figura 3.9 Differenze tra proiezioni realizzate utilizzando il reticolo di Wulff (a) e il reticolo di Schmidt (b). Confrontando le proiezioni in (a) con quelle in (b) si può notare la differenza di orientazione delle tracce ciclografiche che rappresentano i soliti quattro piani (A-D). Gli angoli tra le tracce ciclografiche variano nei due casi.

la proiezione equiareale. Questi reticoli sono costruiti disegnando grandi cerchi che rappresentano piani di direzione Nord-Sud ed inclinazione variabile di  $2^\circ$  in  $2^\circ$  verso Est e verso Ovest, i piccoli cerchi disegnati rappresentano invece linee con *pitch* variabile di  $2^\circ$  in  $2^\circ$  sui grandi cerchi precedenti. I reticoli così costruiti sono noti come *reticolo equatoriale equiangolo (o conforme) di Wulff* e *reticolo equatoriale equiareale (o equivalente) di Schmidt* e sono riportati in Appendice a pag. 63. Vengono detti reticoli equatoriali in quanto i grandi cerchi e i piccoli cerchi hanno una geometria simile a quella di archi di longitudine (meridiani) e di latitudine (paralleli) su di un globo visto da sopra l'equatore.

Questi reticoli presentano solo due linee rette, il diametro Nord-Sud e il diametro Est-Ovest. La linea Nord-Sud rappresenta il grande cerchio di un piano verticale di direzione Nord-Sud, la linea Est-Ovest invece è generata da una linea con *pitch* di  $90^\circ$  che viene ruotata su un piano con direzione Nord-Sud. È importante notare che nel reticolo conforme di Wulff i grandi cerchi e i piccoli cerchi si intersecano formando tra loro sempre angoli di  $90^\circ$ , cosa che invece non si ha nel reticolo equiareale di Schmidt. La principale proprietà del reticolo di Wulff è infatti che conserva anche sul piano di proiezione gli angoli individuati sulla sfera di proiezione, cioè se due piani fanno tra loro un certo angolo anche le rispettive tracce ciclografiche si intersecheranno sul reticolo stereografico con lo stesso angolo, cosa che invece non avviene con il reticolo di Schmidt (Fig. 3.9).

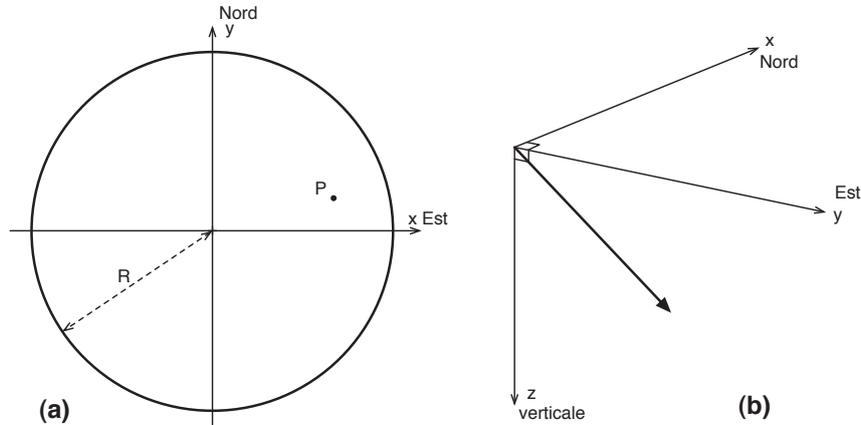
I reticoli equatoriali permettono sia la proiezione di piani che la proiezione di linee, per questo motivo essi sono comunemente usati in geologia rendendo poco diffuso l'uso del reticolo polare, che permette invece solo la proiezione di linee. Le proprietà del reticolo di Wulff e di Schmidt sono riassunte in Tab. 3.1.

### 3.5 Proiezioni stereografiche in coordinate cartesiane

Tutte le relazioni viste finora ci permettono di determinare la posizione di un punto  $P$  in proiezione stereografica esprimendo la posizione in coordinate polari ( $\alpha, r$ ) come illustrato in Fig. 3.4b. Può essere vantaggioso esprimere la posizione di un punto  $P$  in proiezione stereografica non in coordinate polari, ma in coordinate cartesiane ( $x, y$ ), se, per esempio, si vuole creare un programma per computer o programmare un foglio di calcolo per generare automaticamente proiezioni stereografiche. La Fig. 3.10a illustra il sistema di riferimento con coordinate  $x, y$  sovrapposto al cerchio di riferimento di raggio  $R$ ,  $x$  è positivo verso Est,  $y$  è positivo verso Nord. Le coordinate  $x, y$  di un punto  $P$  di direzione di immersione  $\alpha$  e inclinazione  $\beta$  sono riportate in Tab. 3.2.

**Tabella 3.1** Proprietà delle proiezioni stereografiche equiangolari (reticolo di Wulff) ed equiarea (reticolo di Schmidt).  $R$  è il raggio del cerchio primitivo,  $\beta$  è l'inclinazione di un piano o di una linea.

Proprietà	Proiezione stereografica conforme (reticolo di Wulff)	Proiezione stereografica equiarea (reticolo di Schmidt)
La proiezione preserva:	angoli	aree
La proiezione non preserva:	aree	angoli
Piani proiettati come:	archi di circonferenza	curve del quarto ordine
Linee proiettate come:	punti	punti
Grandi cerchi	archi di circonferenza	curve del quarto ordine
Piccoli cerchi	archi di circonferenza	curve del quarto ordine
Distanza tra il centro del cerchio primitivo e la traccia ciclografica di un piano, misurata nella direzione dell'immersione	$R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$	$R\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$
Distanza tra il centro del cerchio primitivo e il polo del piano, misurata nella direzione opposta a quella dell'immersione	$R \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$	$R\sqrt{2} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$
Distanza tra il centro del cerchio primitivo e il punto che rappresenta la linea, misurata nella direzione dell'immersione	$R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$	$R\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$



**Figura 3.10** Proiezione stereografica e sistema di coordinate cartesiane.

**Tabella 3.2** Coordinate cartesiane  $x, y$  di un punto in una proiezione stereografica di raggio  $R$ , emisfero di proiezione inferiore, che rappresenta una linea di giacitura  $\alpha, \beta$  (vedi Fig. 3.10).

Tipo di proiezione	$x$	$y$
Proiezione stereografica equiangolare	$R \sin \alpha \tan\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)$	$R \cos \alpha \tan\left(45 - \frac{\beta}{2}\right)$
Proiezione equiarea di Lambert	$R\sqrt{2} \sin \cos\left(45 + \frac{\beta}{2}\right)$	$R\sqrt{2} \cos \cos\left(45 + \frac{\beta}{2}\right)$

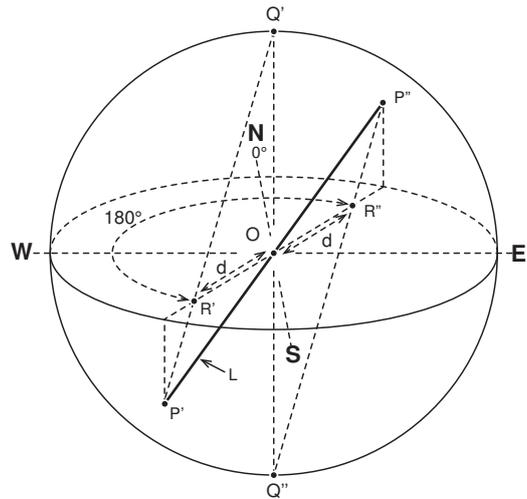


Figura 3.11 Proiezione di una linea usando la semisfera di proiezione inferiore ( $R''$ ) e superiore ( $R'$ ).

### 3.6 Variazione della semisfera di proiezione

Finora abbiamo sempre considerato proiezioni stereografiche effettuate usando la semisfera di proiezione inferiore. Se si vuole usare la semisfera di proiezione superiore, come spesso si ritrova in testi francesi, vale naturalmente tutto quello illustrato finora, ma bisogna introdurre una rotazione supplementare di  $180^\circ$  rispetto alla verticale. Dalla Fig. 3.11 si vede che una linea  $L$  interseca la sfera nei punti  $P'$  e  $P''$ ;  $R'$  e  $R''$  sono le proiezioni sul piano orizzontale dai punti  $Q'$  e  $Q''$ .  $R'$  e  $R''$  sono alla stessa distanza  $d$  dal centro della sfera, perciò i due punti  $R'$  e  $R''$  sono equivalenti a seguito di una rotazione di  $180^\circ$  attorno all'asse  $Q' - Q''$ . In altre parole se si riportano dei punti o delle tracce ciclografiche in proiezione stereografica usando la semisfera inferiore e se in seguito si ruota il tutto di  $180^\circ$ , si ottiene lo stesso risultato che si otterrebbe usando la semisfera di proiezione superiore

## Capitolo 4

# Metodi di proiezione di linee, piani, poli

In questo capitolo vengono illustrate le basi delle proiezioni stereografiche, cioè come riportare una linea e un piano in uno stereogramma. Nel prossimo capitolo verranno introdotte operazioni più complesse, come intersezione di piani, rotazioni di linee, ecc. Tutte queste operazioni possono venire effettuate indifferentemente sia con il reticolo di Wulff che con il reticolo di Schmidt, negli esempi seguenti verrà sempre usato il reticolo di Schmidt, ma le procedure di proiezione sono del tutto analoghe con il reticolo di Wulff. Prima di iniziare qualsiasi operazione bisogna munirsi di una copia del reticolo di proiezione (possono essere fotocopiati i reticoli riportati in Appendice a pag. 63), di un cartoncino rigido (oppure una tavoletta di legno), una puntina da disegno e un foglio di carta da disegno trasparente o di acetato. Si incolla il reticolo sul cartoncino (Fig. 4.1), quindi con la puntina da disegno si buca esattamente il centro del reticolo; la puntina da disegno si applica dalla parte posteriore del cartoncino, in questo modo la punta è rivolta verso l'alto cioè esce dal centro del reticolo. A questo punto si posiziona il foglio di carta trasparente sul reticolo bucadolo con la puntina da disegno, tenendo fermo il cartone il foglio trasparente può essere ruotato liberamente attorno alla puntina. Si disegna sul foglio di carta trasparente il cerchio di riferimento e si riporta l'indicazione del Nord.

Per le proiezioni possono essere utilizzati i reticoli riportati in Appendice in Fig. A.1 e Fig. A.2, che hanno grandi cerchi e piccoli cerchi con orientazione variabile di  $2^\circ$  in  $2^\circ$ . Nelle figure che seguono, per ragioni di semplicità del disegno, sono usati invece reticoli con grandi cerchi e piccoli cerchi con intervalli di  $10^\circ$  in  $10^\circ$ .

Alla fine dei vari capitoli sono presenti alcuni esercizi. Le loro soluzioni sono riportate in Appendice a pag. 75; eccetto ove indicato, in tutti gli esercizi viene usata la proiezione stereografica equiareale (reticolo di Schmidt), sfera di proiezione inferiore.

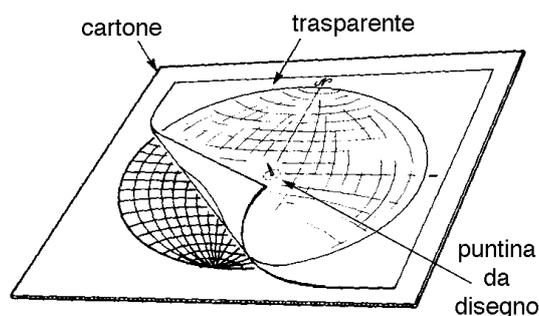


Figura 4.1 Materiale necessario per proiezioni stereografiche.

## 4.1 Proiezione di una linea

Supponiamo di dovere proiettare una linea di orientazione 35/40, cioè direzione di immersione 35° rispetto al Nord e inclinazione 40°. La procedura è la seguente:

- Sul foglio trasparente marcare, con un segno qualsiasi, un angolo di 35° rispetto al Nord sul cerchio di riferimento, l'angolo deve essere misurato in senso orario (Fig. 4.2a).
- Ruotare il foglio trasparente fino a portare il segno di riferimento a coincidere con il diametro Est-Ovest del reticolo (Fig. 4.2b). Lungo il diametro Est-Ovest spostarsi dal cerchio di riferimento verso il centro del reticolo di un valore angolare pari all'inclinazione della linea (40° nel nostro caso). Segnare questo punto sul foglio trasparente.
- Riportare il foglio trasparente nella posizione iniziale. Il punto all'interno del cerchio è la proiezione stereografica della nostra linea (Fig. 4.2c).

Poli di linee poco inclinate cadranno alla periferia dello stereogramma, cioè in prossimità del cerchio di riferimento, linee molto inclinate cadranno nella parte centrale dello stereogramma e una linea verticale darà un polo che coincide con il centro dello stereogramma. Una linea orizzontale intersecherà la sfera di proiezione non in un solo punto, ma in due punti, disposti sul cerchio di riferimento a 180° l'uno dall'altro, cioè all'estremità opposta di un diametro.

### Esercizio 1

Proiettare le seguenti linee: 125/30, 30/66, 180/50, 242/40, 330/15. Soluzione a pagina 75.

## 4.2 Proiezione di un piano come traccia ciclografica

Supponiamo di dovere proiettare un piano di orientazione 160/50, cioè direzione di immersione 160° rispetto al Nord e inclinazione 50°. La procedura è indicata in Fig. 4.3 ed è la seguente.

- Sul foglio trasparente marcare, con un segno qualsiasi, un angolo di 160° rispetto al Nord sul cerchio di riferimento, l'angolo deve essere misurato in senso orario (Fig. 4.3a).
- Ruotare il foglio trasparente fino a portare il segno di riferimento a coincidere con il diametro Est-Ovest del reticolo (Fig. 4.3b). Lungo il diametro Est-Ovest spostarsi dal cerchio di riferimento verso il centro del reticolo di un valore angolare pari all'inclinazione del piano (50° nel nostro caso). Marcare sul foglio trasparente il grande cerchio che passa per questo punto.
- Riportare il foglio trasparente nella posizione iniziale. La traccia ciclografica disegnata all'interno del cerchio è la proiezione stereografica del nostro piano (Fig. 4.3c).

È importante ricordare che la traccia ciclografica che rappresenta un piano è convessa verso la direzione di immersione del piano. Il grado di convessità dipende dall'inclinazione del piano, piano poco inclinati daranno tracce ciclografiche molto convesse e prossime al cerchio primitivo, la traccia ciclografica di un piano orizzontale coincide con il cerchio di riferimento. Piani molto inclinati o subverticali daranno tracce ciclografiche poco convesse e passanti per la parte centrale del cerchio primitivo, piani verticali verranno rappresentati con linee che passano per il centro del cerchio principale.

### Esercizio 2

Ripartire in proiezione stereografica, proiezione equiarea, le tracce ciclografiche dei seguenti piani: 10/10, 260/64, 302/44, 98/30, 140/80. Soluzione a pagina 75.

## 4.3 Proiezione del polo di un piano

Se si devono riportare in una proiezione stereografica un gran numero di piani, disegnarli come tracce ciclografiche può portare a proiezioni stereografiche molto confuse con molte linee che si sovrappongono e in cui è impossibile individuare le tracce ciclografiche dei singoli piani. La costruzione di proiezioni ciclografiche di un gran numero di piani è molto facilitata se per ogni piano invece della traccia ciclografica si riporta il polo del piano. Il *polo di un piano* è l'intersezione della linea ortogonale al piano con la sfera di proiezione.

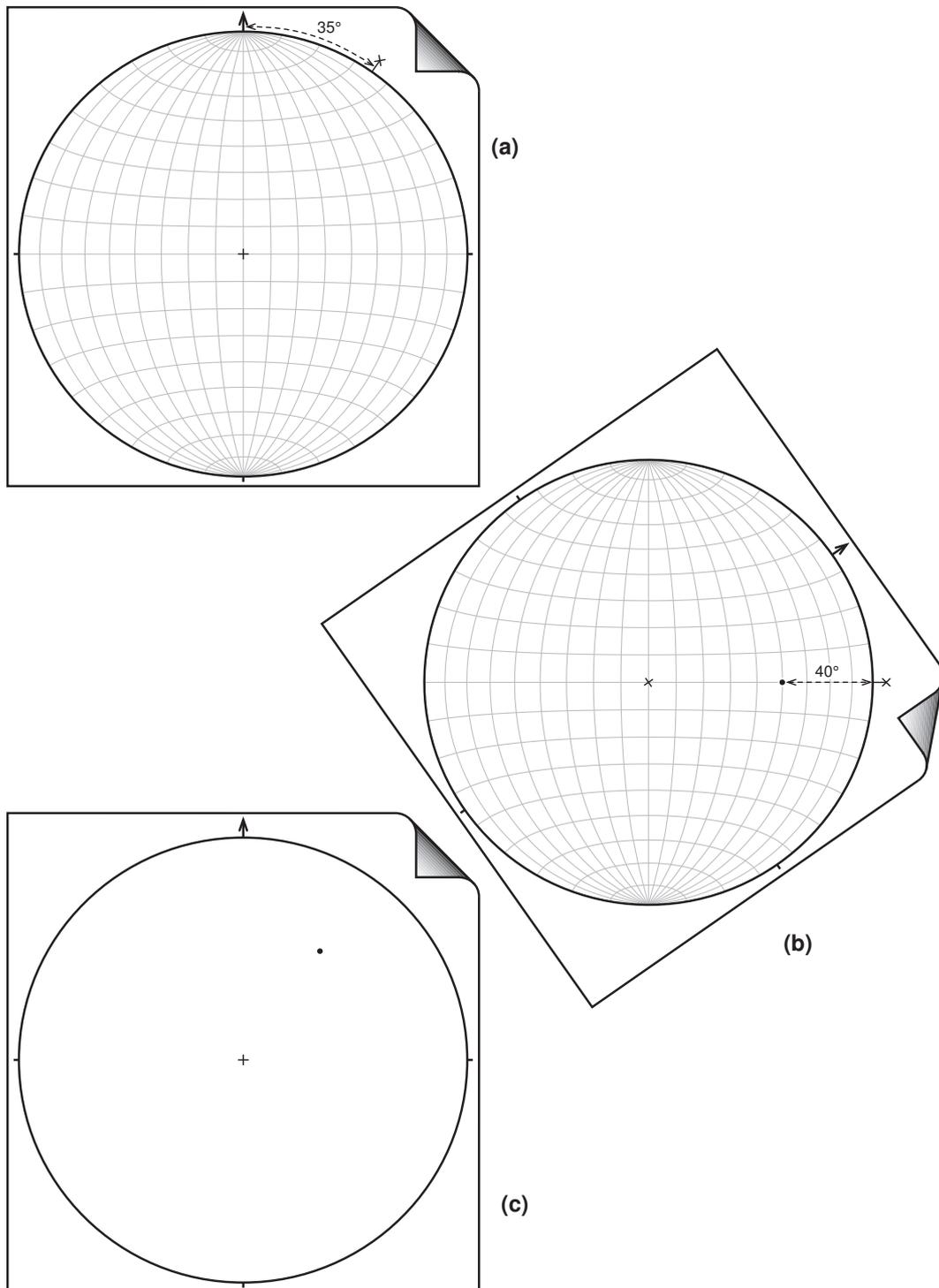


Figura 4.2 Proiezione di una linea orientata 35/40.

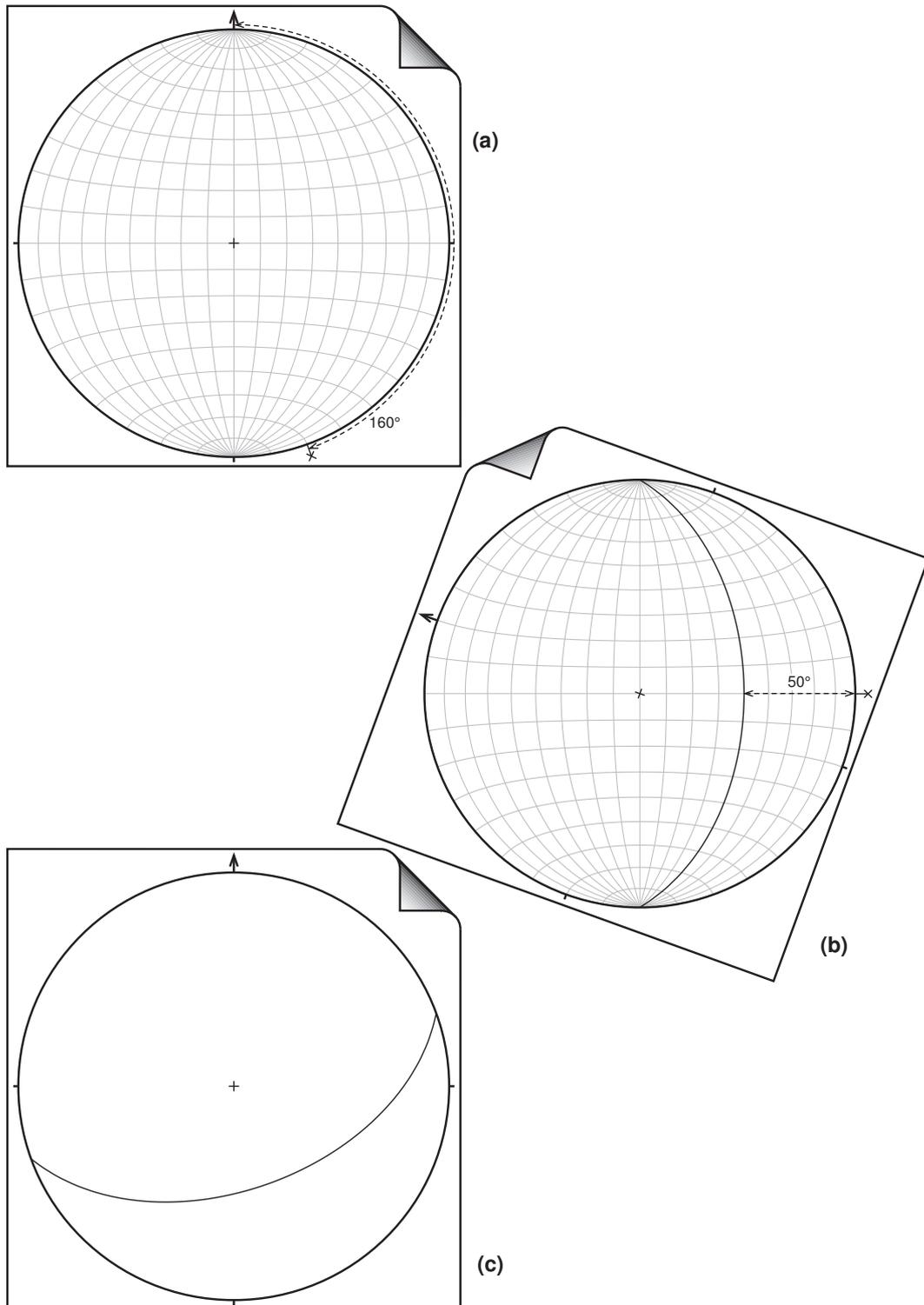


Figura 4.3 Proiezione stereografica di un piano con giacitura 160/50.

In Fig. 4.4a sono illustrati i rapporti, all'interno della sfera di proiezione, tra un piano (orientato 150/30), la sua traccia ciclografica e il polo del piano. In grigio è riportato il piano, la cui intersezione con la sfera di proiezione definisce la sua proiezione sferica ( $S$ ); dal centro della sfera di proiezione è tracciata la linea ortogonale al piano, che interseca la semisfera di proiezione inferiore nel punto  $P$ , il polo del piano. La linea ortogonale al piano avrà direzione di immersione opposta a quella del piano (immersione del piano +180°) e inclinazione di 90° meno l'inclinazione del piano (60° nell'esempio di Fig. 4.4a).

L'angolo tra  $P$  e  $S$  è 90°, e in proiezione stereografica (Fig. 4.4b) il punto  $P$  deve trovarsi a 90° dalla traccia ciclografica del piano. In proiezione stereografica il valore di inclinazione del piano (30° nell'esempio) è la distanza della traccia ciclografica dal cerchio di riferimento, ma è anche la distanza del polo del piano dal centro del cerchio di riferimento.

Per riportare un piano in proiezione stereografica con giacitura per esempio 150/30, mediante il suo polo, bisogna:

- Marcare con un segno di riferimento l'angolo 150° sul cerchio di riferimento in senso orario, analogamente con quanto fatto in Fig. 4.2a e in Fig. 4.3a.
- Si ruota quindi il foglio trasparente fino a portare il segno di riferimento a coincidere con il diametro Est-Ovest.
- A questo punto ci si sposta dal centro del cerchio di riferimento verso la periferia dell'angolo di inclinazione del piano (30°), nella direzione opposta a quella in cui si trova il segno di riferimento. Il punto così trovato è il polo del piano.

Piani molto inclinati avranno in proiezione stereografica poli localizzati in prossimità del cerchio primitivo, nel caso di un piano verticale essendo la normale al piano una linea orizzontale non vi sarà un unico polo ma una coppia di poli sul cerchio di riferimento alle due estremità di un diametro. Piani poco inclinati o suborizzontali avranno poli nella parte centrale del cerchio primitivo, un piano orizzontale darà un polo che coincide con il centro del cerchio di riferimento.

### Esercizio 3

Riportare in proiezione stereografica i poli dei seguenti piani: 280/22, 350/60, 40/52, 175/18, 210/30. a pagina 75.

## 4.4 Orientazione di un dato punto o traccia ciclografica

In alcuni casi si rende necessario effettuare operazioni inverse rispetto a quelle viste in precedenza. Talvolta cioè si può disporre di una traccia ciclografica in proiezione stereografica realizzata da altri, oppure di un polo di un piano o un punto che rappresenta una linea e si desidera conoscere l'orientazione del corrispondente piano o linea.

Vediamo inizialmente il caso di una proiezione stereografica su cui è già stata disegnata una traccia ciclografica (Fig. 4.5a) e cerchiamo di ricavare l'orientazione del piano corrispondente. Per fare questo bisogna ruotare il foglio trasparente con la traccia ciclografica fino a farla corrispondere con uno dei grandi cerchi (Fig. 4.5b), leggere l'inclinazione del piano contando il valore angolare sul diametro E-W, tra il cerchio di riferimento e la traccia ciclografica (40° in Fig. 4.5b). Marcare questa posizione con un segno sul cerchio di riferimento in corrispondenza del diametro. A questo punto si può riportare il foglio trasparente nella posizione originaria (Fig. 4.5c), e leggere l'angolo che il segno fatto precedentemente sul cerchio di riferimento fa rispetto al Nord, misurato in senso orario. Questo angolo (310°) è la direzione di immersione del piano, il piano quindi ha orientazione 310/40.

Vediamo ora il caso di una proiezione stereografica su cui è già stato riportato un punto che rappresenta la proiezione stereografica di una linea (Fig. 4.5d) e cerchiamo di ricostruire l'orientazione della linea. Per fare questo bisogna ruotare il foglio trasparente con il punto fino a portare il punto sul diametro Est-Ovest (Fig. 4.5d), in questa posizione si può leggere l'inclinazione del piano contando gli angoli tra il cerchi di riferimento e il punto (20° in Fig. 4.5e). Marcare questa posizione con un segno sul cerchio di riferimento in corrispondenza del diametro. A questo punto si può riportare il foglio trasparente nella posizione originaria (Fig. 4.5f), e leggere l'angolo che il segno fatto precedentemente

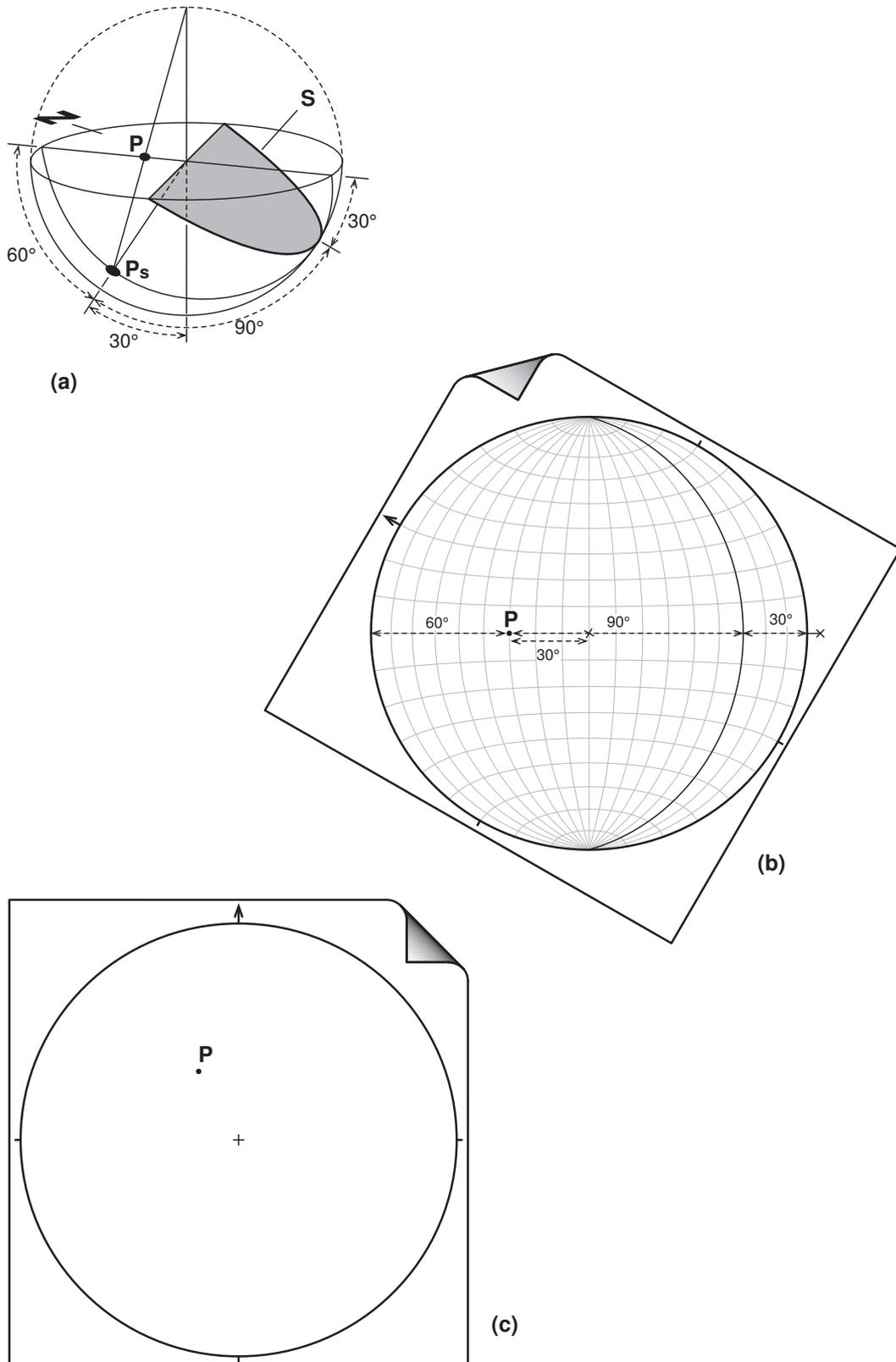


Figura 4.4 Proiezione del polo ( $P$ ) di un piano orientato  $150/30$ .

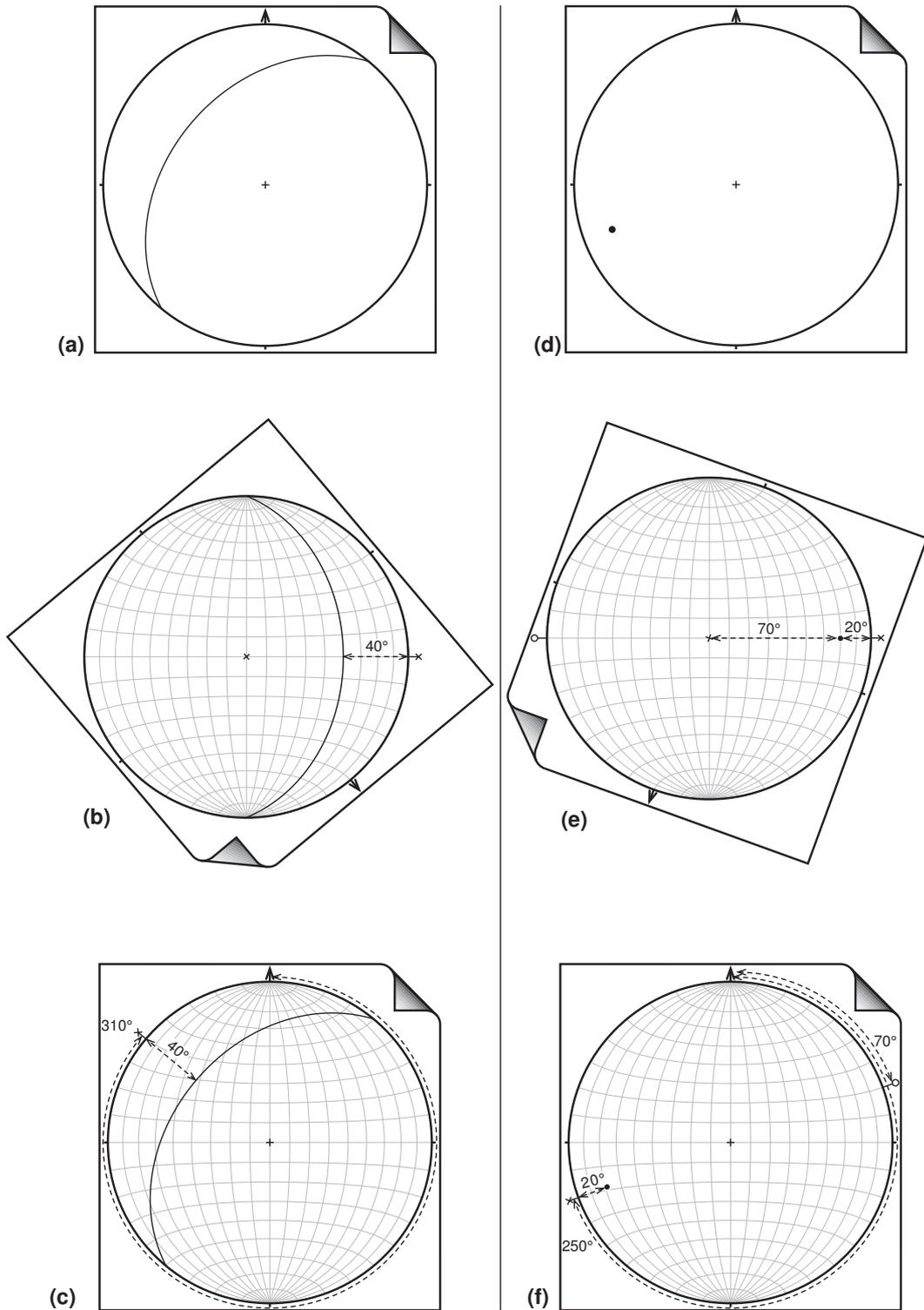


Figura 4.5 Procedura per ricavare l'orientazione di un piano nota la sua traccia ciclografica (a, b, c); il piano risulta essere orientato  $310/40$ . Procedura per riconoscere l'orientazione di una linea nota la sua proiezione, un punto, nello stereogramma (c, d, e); la linea è orientata  $250/20$ .

sul cerchio di riferimento fa rispetto al Nord, misurato in senso orario. Questo angolo ( $250^\circ$ ) è la direzione di immersione della linea, la linea quindi ha orientazione 250/20.

Se il punto di Fig. 4.5d rappresenta invece la proiezione del polo di un piano, si ruota il punto fino a portarlo nella posizione di Fig. 4.5e, ma l'inclinazione da leggere è quella tra il punto e il centro del cerchio di riferimento ( $70^\circ$  in Fig. 4.5e). Marcare questa posizione con un segno sul cerchio di riferimento in corrispondenza del diametro, però dalla parte opposta rispetto al punto. Si può riportare a questo punto il foglio trasparente nella sua posizione originaria (Fig. 4.5f), e leggere l'angolo che il segno sul cerchio di riferimento fa rispetto al Nord, misurato in senso orario. Questo angolo ( $70^\circ$ ) è la direzione di immersione del piano, il piano quindi ha orientazione 70/20.

## 4.5 Proiezione di un cono

Le procedure per proiettare un cono in proiezione stereografica sono differenti a seconda se si tratta di un cono con asse verticale, orizzontale o inclinato e se utilizziamo il reticolo di proiezione equiarea di Schmidt o quello equiangolare di Wulff. Di seguito vediamo i vari casi possibili.

### Cono con asse verticale, reticolo di Schmidt o di Wulff

Per proiettare un cono con asse verticale non è necessario effettuare alcuna rotazione del foglio di carta trasparente sovrapposto al reticolo di proiezione. La procedura è la stessa sia che si utilizzi il reticolo di Schmidt sia che si usi quello di Wulff.

- Partendo dal centro del cerchio di proiezione si conta il valore angolare  $\alpha$  che rappresenta l'angolo di apertura del cono (Fig. 4.6a). Il valore di  $\alpha$  può essere contato sia sul diametro E-W che quello N-S.
- Con un semplice compasso tracciare un cerchio con centro nel centro del cerchio di proiezione e raggio  $\alpha$ , il cerchio così disegnato (cerchio C1 in Fig. 4.6a) è la proiezione verticale del cono.

A causa delle diversità tra il reticolo di Schmidt e di Wulff, proiezioni di coni con asse verticale nel reticolo di Schmidt (C1) daranno circonferenze maggiori rispetto a proiezioni realizzate usando il reticolo di Wulff (circonferenza C2 in Fig. 4.6a).

### Cono con asse orizzontale, reticolo di Schmidt o di Wulff

La procedura è la stessa sia che si utilizzi il reticolo di Schmidt sia che si usi quello di Wulff, nell'esempio di Fig. 4.6b viene usato il reticolo di Schmidt.

- Si segna all'esterno del cerchio di proiezione l'orientazione dell'asse del cono ( $340^\circ$  in Fig. 4.6b).
- Si ruota il foglio di carta trasparente fino a portare l'asse del cono a corrispondere con il diametro N-S del reticolo di proiezione.
- Ci si sposta lungo il diametro N-S, dal cerchio primitivo verso il centro del reticolo, contando un valore angolare  $\alpha$  pari all'angolo di apertura del cono ( $30^\circ$  nell'esempio di Fig. 4.6b).
- Il piccolo cerchio che si trova ad una distanza  $\alpha$  dal cerchio primitivo è la proiezione del cono con asse orizzontale (piccolo cerchio C3 in Fig. 4.6b e in Fig. 4.6a).
- Ripetere la stessa procedura partendo dall'estremità opposta del diametro N-S.

Se si utilizza il reticolo di Wulff la procedura è la stessa, il piccolo cerchio disegnato avrà solamente una forma diversa (archi di circonferenza) essendo differente il reticolo di proiezione. I piccoli cerchi C4 in Fig. 4.6a sono la proiezione di un cono, sempre con angolo di apertura di  $30^\circ$ , su un reticolo di Wulff.

### Cono con asse inclinato, reticolo di Schmidt

Il tipo di proiezione di Lambert utilizzata per costruire il reticolo di Schmidt implica che i piccoli cerchi non sono in realtà delle circonferenze, ma curve più complesse. Per questo motivo la forma di un piccolo cerchio nel reticolo di Schmidt che rappresenta la proiezione di un cono con asse inclinato deve essere costruita proiettando i punti che rappresentano le linee che giacciono sul cono, cioè le linee

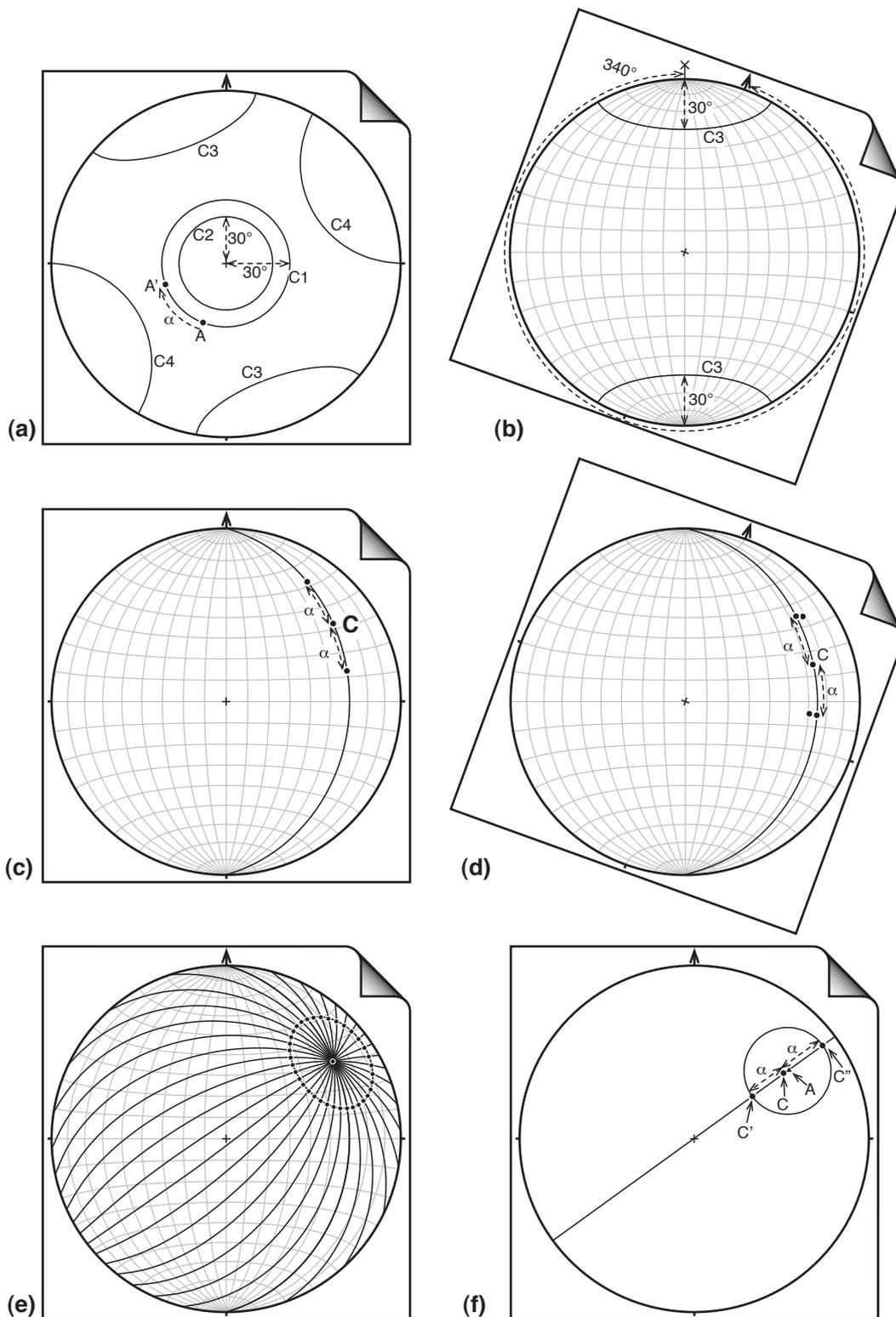


Figura 4.6 Proiezioni di coni. (a) C1 è la proiezione di un cono verticale con angolo di apertura  $\alpha = 30^\circ$  sul reticolo di Schmidt, C2 è la proiezione di un cono verticale con angolo di apertura  $\alpha = 30^\circ$  con il reticolo di Wulff. C3 è la proiezione di un cono orizzontale con asse orientato  $160/0$  e angolo d'apertura  $30^\circ$  con il reticolo di Schmidt, C4 è la proiezione di un cono orizzontale con asse orientato  $240/0$  e angolo d'apertura  $30^\circ$  con il reticolo di Wulff. (d), (e) Costruzione di un cono con asse inclinato  $54/25$  e angolo d'apertura  $\alpha = 20^\circ$  *irc* con il reticolo di Schmidt. (f) Costruzione di un cono con asse inclinato  $C54/25$  e angolo d'apertura  $\alpha = 20^\circ$  *irc* con il reticolo di Wulff. Si noti che l'asse C è differente dal centro del piccolo cerchio A.

che formano un angolo costante  $\alpha$  con l'asse del cono.  $\alpha$  è l'angolo di apertura del cono. La procedura è la seguente.

- a) Proiettare l'asse del cono (punto C in Fig. 4.6c).
- b) Sul grande cerchio che passa per il punto C segnare i due punti che formano un angolo  $\alpha$  con la linea C.
- c) Ruotare il foglio di carta trasparente (es. di  $10^\circ$  in senso orario), in questa nuova orientazione individuare la nuova traccia ciclografica che passa per C e nuovamente segnare i due punti che formano un angolo  $\alpha$  con la linea C (Fig. 4.6d).
- d) Ripetere l'operazione del punto precedente ruotando ancora il foglio trasparente in senso orario (es. ancora di  $10^\circ$ ) e proiettando ancora le due linee ad un angolo  $\alpha$  con C. Quando sono stati proiettati un numero sufficiente di queste coppie di punti unire tutti i punti, che definiranno così il piccolo cerchio attorno a C con angolo di apertura  $\alpha$  (Fig. 4.6e).

### Cono con asse inclinato, reticolo di Wulff

La proiezione stereografica di coni con assi inclinati usando il reticolo di Wulff è molto più semplice rispetto a quanto abbiamo visto con il reticolo di Schmidt, questo perché nel reticolo di Wulff i piccoli cerchi sono effettivamente delle circonferenze. La procedura per proiettare un cono con asse inclinato è la seguente.

- a) 1. Riportare in proiezione stereografica utilizzando il reticolo di Wulff l'asse del cono (punto C in Fig. 4.6f).
- b) Sul piano verticale che contiene l'asse del cono misurare l'angolo  $\alpha$ , angolo di apertura del cono, nelle due direzioni opposte rispetto a C, individuando così i punti C' e C.
- c) Misurare sul foglio trasparente la distanza C'-C in millimetri (non il valore angolare!) e trovare il punto A equidistante da C' e C (indicato con un triangolo in Fig. 4.6f). Si noti che il centro del cono C non coincide con A, questo perché il reticolo di Wulff introduce una distorsione sempre maggiore avvicinandosi al cerchio orizzontale di riferimento (vedi Fig. 4.6c).
- d) Con un compasso disegnare un cerchio con centro in A e raggio la distanza A-C, questo cerchio è la proiezione inclinata del cono con angolo di apertura  $\alpha$ .

#### Esercizio 4

Riportare in proiezione stereografica equiangolare e equiarea i seguenti coni:

- a) direzione di immersione asse:  $250^\circ$ , inclinazione  $55^\circ$ , apertura  $30^\circ$ ;
- b) direzione di immersione asse:  $20^\circ$ , inclinazione  $20^\circ$ , apertura  $15^\circ$ ;
- c) direzione di immersione asse:  $130^\circ$ , inclinazione  $20^\circ$ , apertura  $35^\circ$ .

Soluzione a pagina 75.

## Capitolo 5

# Operazioni con linee e piani

### 5.1 Proiezione di una linea noto il pitch

Come già visto nel Capitolo 2.2, l'orientazione di una linea può essere espressa non dalla sua direzione di immersione e inclinazione, ma dalla giacitura del piano che la contiene e dal suo pitch su questo piano (la definizione di pitch è riportata in Fig. 2.1b). Vediamo la procedura per riportare in proiezione stereografica una linea che giace sul piano 225/30 con pitch di  $40^\circ$  verso SE.

- Si disegna la traccia ciclografica del piano che contiene la linea (piano 225/30 in Fig. 5.1a).
- Si ruota il foglio di carta trasparente fino a portare la traccia ciclografica a coincidere con la traccia ciclografica del reticolo sottostante (Fig. 5.1b).
- Si contano  $40^\circ$  (il valore del pitch) lungo la traccia ciclografica a partire dal cerchio di riferimento da Sud-Est, il punto così individuato rappresenta la nostra linea.
- La Fig. 5.1c riporta la proiezione stereografica della linea, la sua orientazione può essere determinata seguendo le indicazioni del Capitolo 4.4; si può verificare che la linea ha orientazione 172/20.

E' importante notare che l'angolo di  $40^\circ$  sulla traccia ciclografica in Fig. 5.1b potrebbe essere calcolato anche partendo dalla parte opposta del cerchio di proiezione (parte inferiore del reticolo). L'angolo del pitch andrebbe calcolato in questo modo se il pitch fosse calcolato verso NW.

#### Esercizio 5

Riportare in proiezione stereografica le seguenti linee, noto il piano che le contiene e il pitch:

- piano 100/30, pitch  $15^\circ$  N;
- piano 205/44, pitch  $46^\circ$  E;
- piano 50/60, pitch  $20^\circ$  W.

Soluzioni a pagina 75.

#### Esercizio 6

La linea 246/26 è misurata su un piano con direzione di immersione  $310^\circ$ . Qual'è l'inclinazione del piano e il pitch della linea? Soluzioni a pagina 75.

#### Esercizio 7

La linea 172/12 è misurata su di un piano che inclina di  $25^\circ$ . Qual'è la direzione di immersione del piano e il pitch della linea? Soluzione a pagina 75.

### 5.2 Piano contenente due linee

Vediamo come determinare mediante proiezioni stereografiche l'orientazione del piano che contiene due linee.

- Si riportano in uno stereogramma le due linee (linea A e B in Fig. 5.2a).

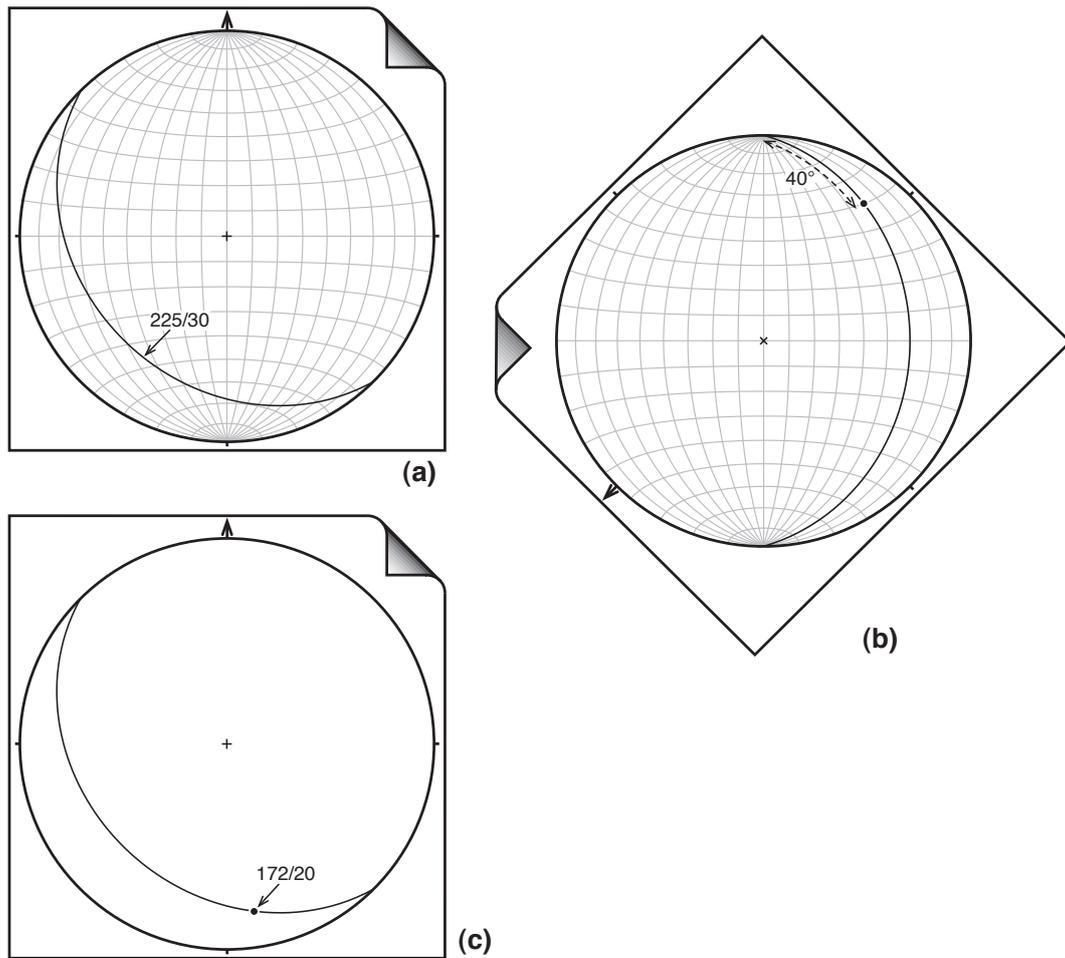


Figura 5.1 Proiezione di una linea noto il *pitch*. La linea giace sul piano  $225/30$  e ha un *pitch* di  $40^\circ$  verso SE. La linea ha orientazione  $172/20$ .

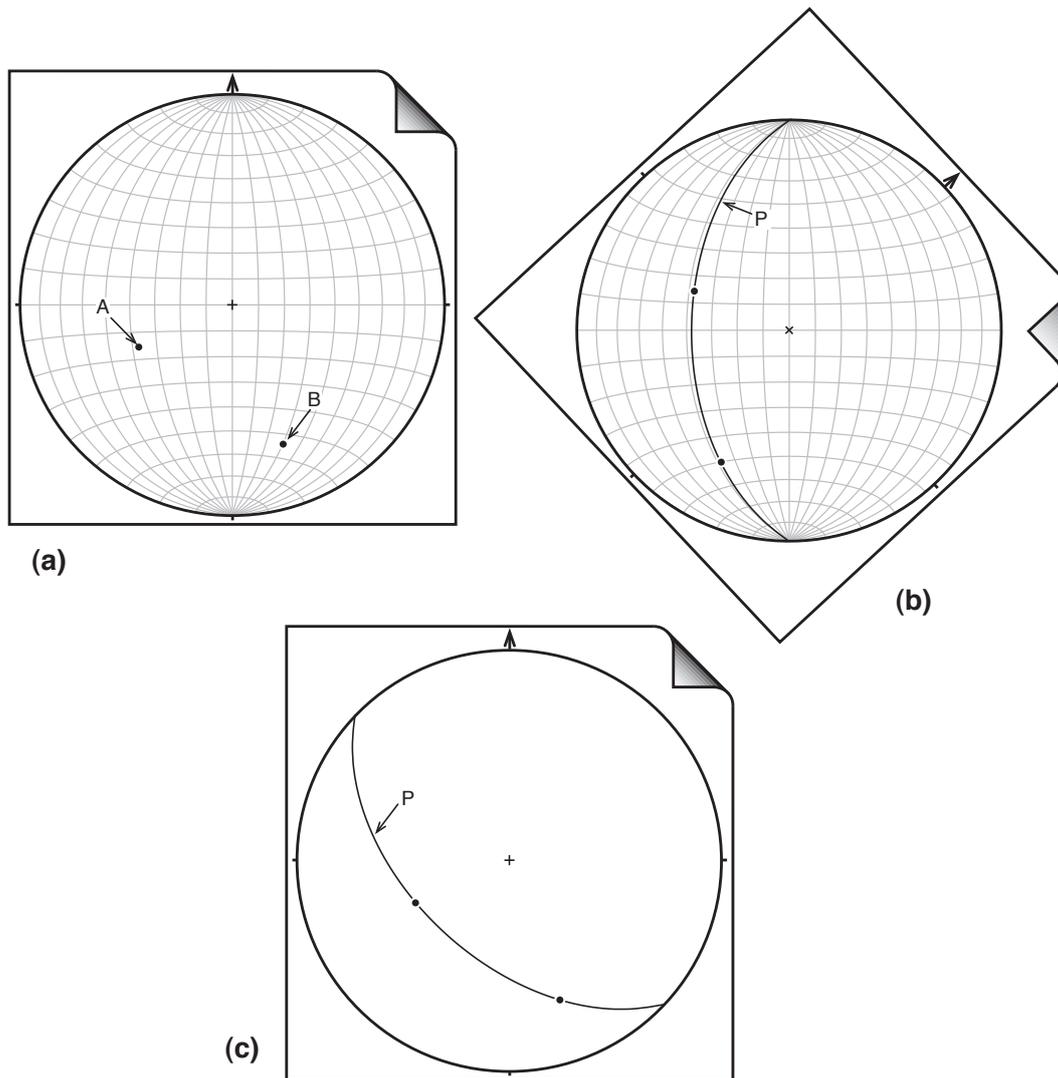


Figura 5.2 Costruzione per determinare il piano contenente due linee. La linea A ha orientazione 245/50 e la linea B è orientata 160/30, il piano P ha orientazione 223/52.

- b) Si ruota il foglio trasparente con lo stereogramma fino a portare i due punti che rappresentano le due linee a giacere sulla stessa traccia ciclografica, si disegna tale traccia ciclografica sullo stereogramma (traccia ciclografica P in Fig. 5.2b).  
 c) Lo stereogramma risultante (Fig. 5.2c) riporta la traccia ciclografica del piano che contiene le due linee.

Sulla base di quanto visto nel Capitolo 4.4 si può determinare l'orientazione del piano, che nell'esempio di Fig. 5.2c si può verificare ha orientazione 223/52.

### Esercizio 8

Trovare i piani che contengono le seguenti coppie di linee:

- a) linea 280/20 e linea 350/48;  
 b) linea 260/40 e linea 150/60;  
 c) linea 190/20 e linea 60/50.

Soluzioni a pagina 75.

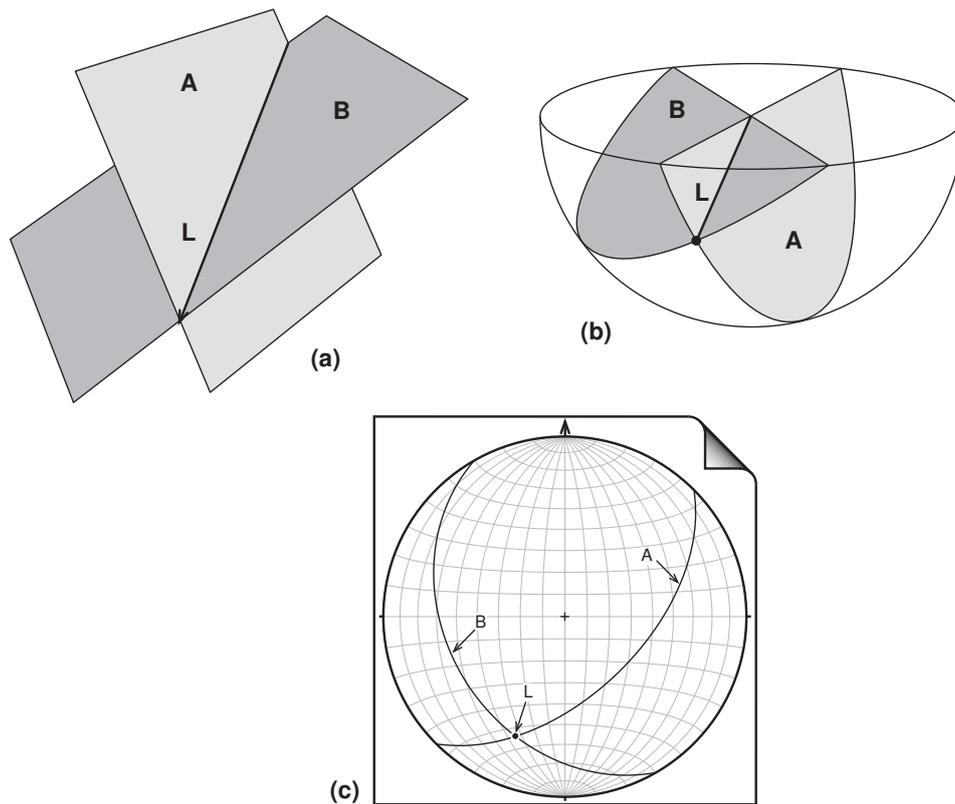


Figura 5.3 Intersezione tra due piani utilizzando le tracce ciclografiche. Intersezione tra il piano A (135/55) e il piano B (240/35), la loro intersezione è la linea L di orientazione 202/30.

### 5.3 Intersezione tra due piani

L'intersezione tra due piani è una linea retta. Questa linea può essere determinata in due modi, utilizzando le tracce ciclografiche oppure usando i poli dei piani.

#### Metodo con le tracce ciclografiche

In proiezione stereografica la linea intersezione di due piani è il punto dato dall'intersezione delle due tracce ciclografiche che rappresentano i piani (Fig. 5.3).

#### Metodo con i poli dei piani

L'intersezione tra due piani può essere determinata anche utilizzando i poli dei piani, come illustrato in Fig. 5.4. A e B sono i due piani,  $P_A$  e  $P_B$  sono i poli dei due piani, dalla Fig. 5.4a si vede come i due poli sono contenuti nel piano P, il piano ortogonale alla linea L intersezione tra i due piani.

La costruzione in proiezione stereografica è illustrata in Fig. 5.4b:

- Si riportano i poli dei due piani ( $P_A$  e  $P_B$ ).
- Si trova la traccia ciclografica (grande cerchio P) che passa per i due poli.
- Il polo di questo grande cerchio è l'intersezione tra i due piani (L).

#### Esercizio 9

Calcolare le linee intersezioni tra le seguenti coppie di piani:

- piano 50/30 e piano 320/50;
- piano 240/60 e piano 185/15;
- piano 150/20 e piano 100/70.

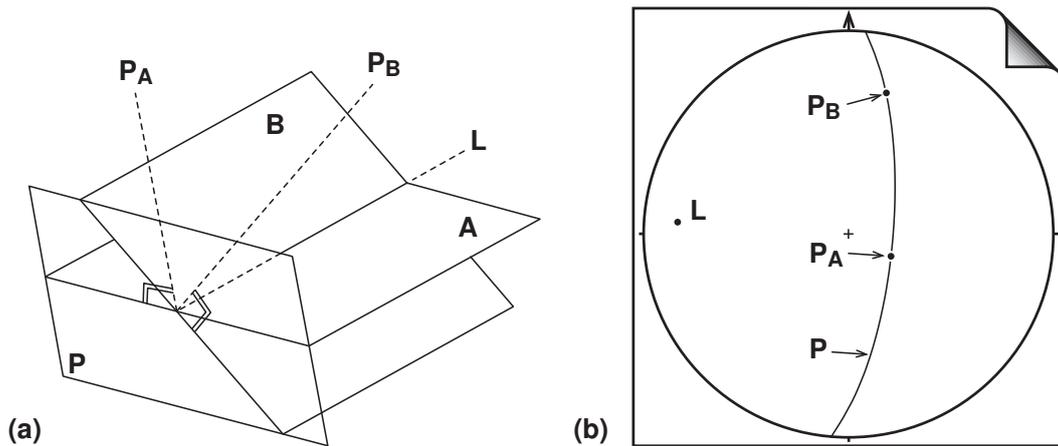


Figura 5.4 Intersezione tra due piani utilizzando il metodo dei poli dei piani.

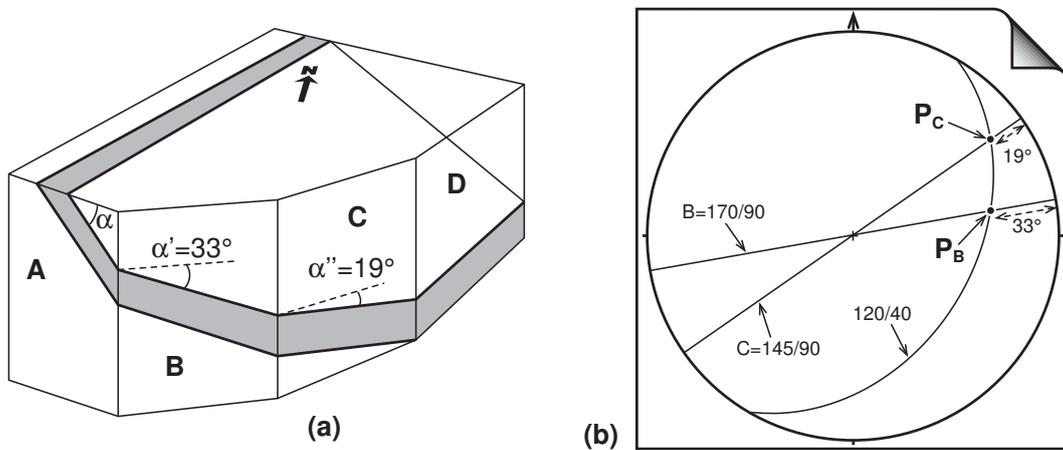


Figura 5.5 (a) Inclinazione apparente di uno strato (in grigio) su varie superfici. La superficie A è ortogonale alla direzione (*strike*) dello strato e perciò parallela alla direzione di massima pendenza dello strato, l'angolo  $\alpha$  è quindi l'inclinazione reale dello strato; la superficie B ha orientazione 170/90 e 33° è l'inclinazione apparente dello strato su questa superficie; la superficie C ha orientazione 145/90 e 19° è l'inclinazione apparente dello strato su questa superficie; la superficie D è parallela alla direzione dello strato, lo strato appare quindi orizzontale su questa superficie (in altre parole lo strato ha un'inclinazione apparente uguale a zero su questa superficie). (b) Proiezione stereografica delle superfici illustrate in (a), lo strato in grigio ha giacitura 120/40.

Soluzioni a pagina 75.

## 5.4 Inclinazione reale e inclinazione apparente

L'inclinazione di uno strato è quella reale se è misurata nella direzione di immersione, cioè su di un piano verticale ortogonale alla direzione (*strike*) dello strato (vedi Capitolo 2.1). Su qualsiasi altro piano verticale non ortogonale alla direzione dello strato, lo strato stesso apparirà con una inclinazione minore, detta inclinazione apparente.

L'angolo di inclinazione apparente dipende dall'inclinazione reale dello strato e dall'angolo tra la direzione dello strato e la direzione della superficie di osservazione; se quest'ultimo angolo è zero, cioè le due superfici hanno la stessa direzione, lo strato inclinato apparirà orizzontale sulla superficie di osservazione (vedi inclinazioni apparenti sulle superfici A, B, C, D in Fig. 5.5a). Due sono le tipiche applicazioni del concetto di inclinazione apparente con le proiezioni stereografiche: calcolare l'inclinazione apparente su una sezione verticale e calcolare la giacitura di uno strato quando sono note due inclinazioni apparenti.

### Inclinazione apparente su una sezione verticale

Il calcolo dell'inclinazione apparente ha un'importante applicazione quando si costruiscono sezioni geologiche, cioè quando si conosce direzione di immersione e inclinazione di un piano (stratificazione, faglia, ecc.) e si vuole sapere la sua inclinazione apparente sulla sezione geologica, cioè su un piano verticale. Per fare questo bisogna riportare in proiezione stereografica la traccia ciclografica corrispondente al piano e la traccia ciclografica verticale che rappresenta la sezione geologica. La loro intersezione è una linea la cui inclinazione rappresenta l'inclinazione apparente del piano sulla traccia della sezione geologica. L'Esercizio 5 mostra un esempio di questa costruzione.

### Giacitura di uno strato da due inclinazioni apparenti

Un'altra applicazione è il calcolo dell'inclinazione reale di uno strato conoscendo due inclinazioni apparenti su due diverse superfici verticali. Supponiamo di osservare in affioramento l'immersione apparente di uno strato (indicato in grigio in Fig. 5.5a) su due superfici verticali, una orientata 170/90 (superficie B) e l'altra orientata 145/90 (superficie C); l'immersione apparente osservabile in affioramento è di 33° sulla superficie B e di 19° sulla superficie C. In proiezione stereografica per determinare l'inclinazione reale dello strato bisogna seguire la seguente procedura.

- Riportare come tracce ciclografiche le due superfici su cui si fanno le osservazioni; nel caso della Fig. 5.5b sono due rette perché si tratta di superfici verticali.
- Su ognuna di queste superfici si riporta l'inclinazione apparente dello strato, i punti  $P_A$  e  $P_B$  che si ricavano rappresentano due linee che sono l'intersezione dello strato con le superfici di osservazione.
- Lo strato inclinato deve passare per i punti  $P_A$  e  $P_B$ , bisogna quindi applicare quanto visto nel Capitolo 5.2 per determinare l'orientazione del piano che contiene  $P_A$  e  $P_B$ . Nell'esempio di Fig. 5.5b lo strato inclinato avrà giacitura 120/30.

#### Esercizio 10

Trovare l'inclinazione apparente di uno strato di giacitura 260/25 su di una superficie orientata 190/90 (cioè di direzione N100E). Soluzione a pagina 75.

#### Esercizio 11

Uno strato ha inclinazione apparente di 24° verso Est su di una superficie verticale di orientazione 350/90 e inclinazione apparente di 30° verso Sud su di una superficie verticale di orientazione 276/90. Qual'è la giacitura reale dello strato? Soluzione a pagina 75.

## 5.5 Angolo tra due linee

L'angolo tra due linee, linea A e linea B, è l'angolo  $\alpha$  misurato sul piano che le contiene entrambe (Fig. 5.6a). Per fare questo si deve operare nel seguente modo.

- Riportare le due linee in proiezione stereografica (Fig. 5.6b).
- Si determina il piano P che le contiene, seguendo le modalità riportate nel Capitolo 5.2 (Fig. 5.6c).
- Sulla traccia ciclografica si legge l'angolo  $\alpha$  tra le due linee, che è rappresentato dall'angolo tra i due punti (42° in Fig. 5.6c).
- Il piano 160/40 è il piano che contiene le due linee (Fig. 5.6d)

#### Esercizio 12

Misurare l'angolo tra le seguenti coppie di linee:

- linea 30/20 e linea 45/30;
- linea 150/40 e linea 210/20;
- linea 270/60 e linea 280/10.

Soluzioni a pagina 75.

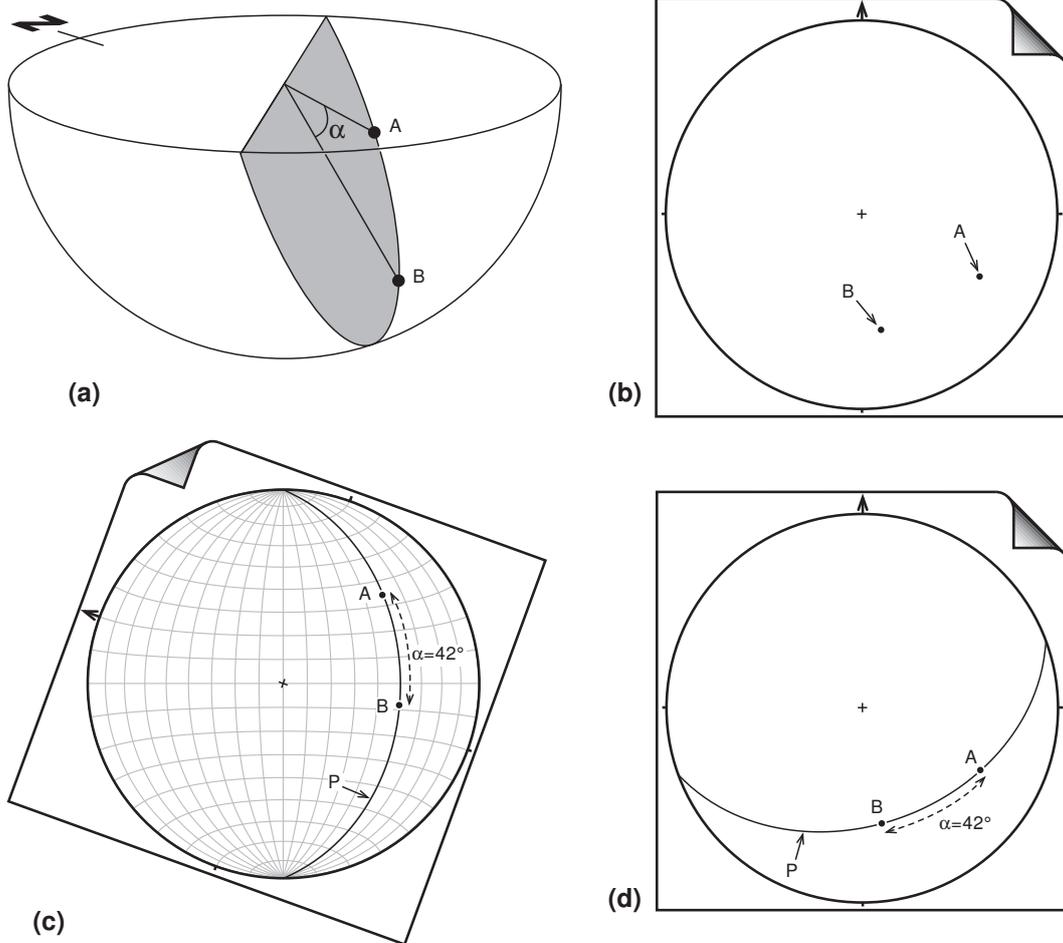


Figura 5.6 Misura dell'angolo tra due linee. La linea A ha orientazione 118/32, la linea B ha orientazione 170/40, l'angolo  $\alpha$  tra le due linee è  $42^\circ$ .

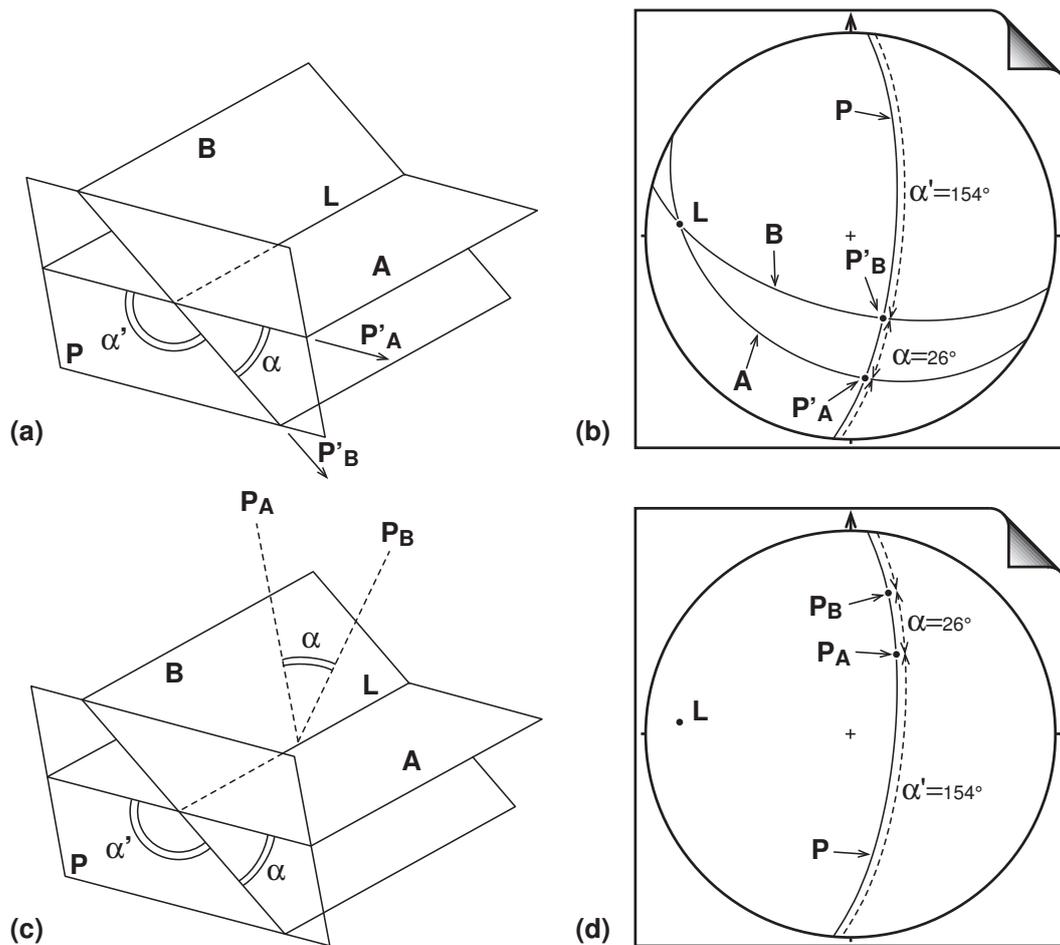


Figura 5.7 Angolo tra due piani. Il piano A ha orientazione 210/36, il piano B 195/60, la loro intersezione L è la linea di orientazione 273/17. Il piano P ortogonale all'intersezione tra i due piani ha giacitura 95/73. L'angolo acuto tra i due piani  $\alpha$  è  $26^\circ$ , l'angolo ottuso  $\alpha'$  è  $154^\circ$ .

## 5.6 Angolo tra due piani

Questa costruzione è usata frequentemente in geologia per calcolare, per esempio, l'angolo di apertura di una piega o l'angolo tra strati separati da una discordanza. In tre dimensioni (Fig. 5.7a) due piani si intersecano definendo la linea L, l'angolo tra due piani è definito come l'angolo acuto  $\alpha$  misurato sul piano P ortogonale alla linea L. Mediante l'uso di proiezioni stereografiche è facile determinare l'angolo tra due piani, questo può essere determinato riportando i piani come tracce ciclografiche oppure come poli. Vediamo le due differenti procedure nei due casi.

### Metodo con le tracce ciclografiche dei piani

Si procede nel modo seguente.

- Si riportano in proiezione stereografica le tracce ciclografiche dei due piani (grandi cerchi A e B in Fig. 5.7b).
- L'intersezione tra le due tracce definisce il punto L che rappresenta la linea d'intersezione tra i due piani.
- Si riporta come traccia ciclografica il piano il cui polo è il punto L, questa traccia rappresenta il piano P di Fig. 5.7a. L'intersezione tra la traccia P e le tracce dei due piani (A e B) definiscono i punti  $P'_A$  e  $P'_B$ .

- d) Sulla traccia ciclografica del piano P è possibile a questo punto leggere l'angolo tra le linee  $P'_A$  e  $P'_B$ , che è anche l'angolo tra i due piani. Si noti che sulla traccia P è possibile leggere due angoli ( $\alpha$  e  $\alpha'$ ) la cui somma è  $180^\circ$ . L'angolo  $\alpha$  è l'angolo acuto tra i due piani,  $\alpha'$  è l'angolo ottuso.

#### Metodo con i poli dei piani

Questo metodo si basa sul fatto che l'angolo tra due piani è uguale all'angolo tra le rispettive normali, cioè tra i rispettivi poli in proiezione stereografica.

- Riportare in proiezione stereografica i poli dei due piani (linee  $P_A$  e  $P_B$  in Fig. 5.7c).
- Trovare la traccia ciclografica che contiene i due poli, come illustrato nel Capitolo 5.5.
- Su questa traccia ciclografica leggere l'angolo acuto ( $\alpha$ ) e ottuso ( $\alpha'$ ) tra le due linee, cioè tra i piani A e B.

#### Esercizio 13

Misurare l'angolo tra le seguenti coppie di piani:

- piano 305/30 e piano 260/25;
- piano 160/50 e piano 118/40;
- piano 80/30 e piano 45/51.

Soluzioni a pagina 75.

## 5.7 Piano bisettore tra due piani

Per determinare in proiezione stereografica il piano bisettore tra due piani (es. piano bisettore dei piani A e B) bisogna ricordare che tale piano C contiene (Fig. 5.8a):

- l'intersezione (L) tra i piani A e B;
- la linea  $L_C$  bisettrice dell'angolo  $\alpha$  tra i due piani A e B, cioè la linea bisettrice dell'angolo tra le linee  $L_A$  e  $L_B$ .

Questo problema può essere risolto in due modi, riportando i piani come tracce ciclografiche o come poli. Vediamo i due casi separatamente.

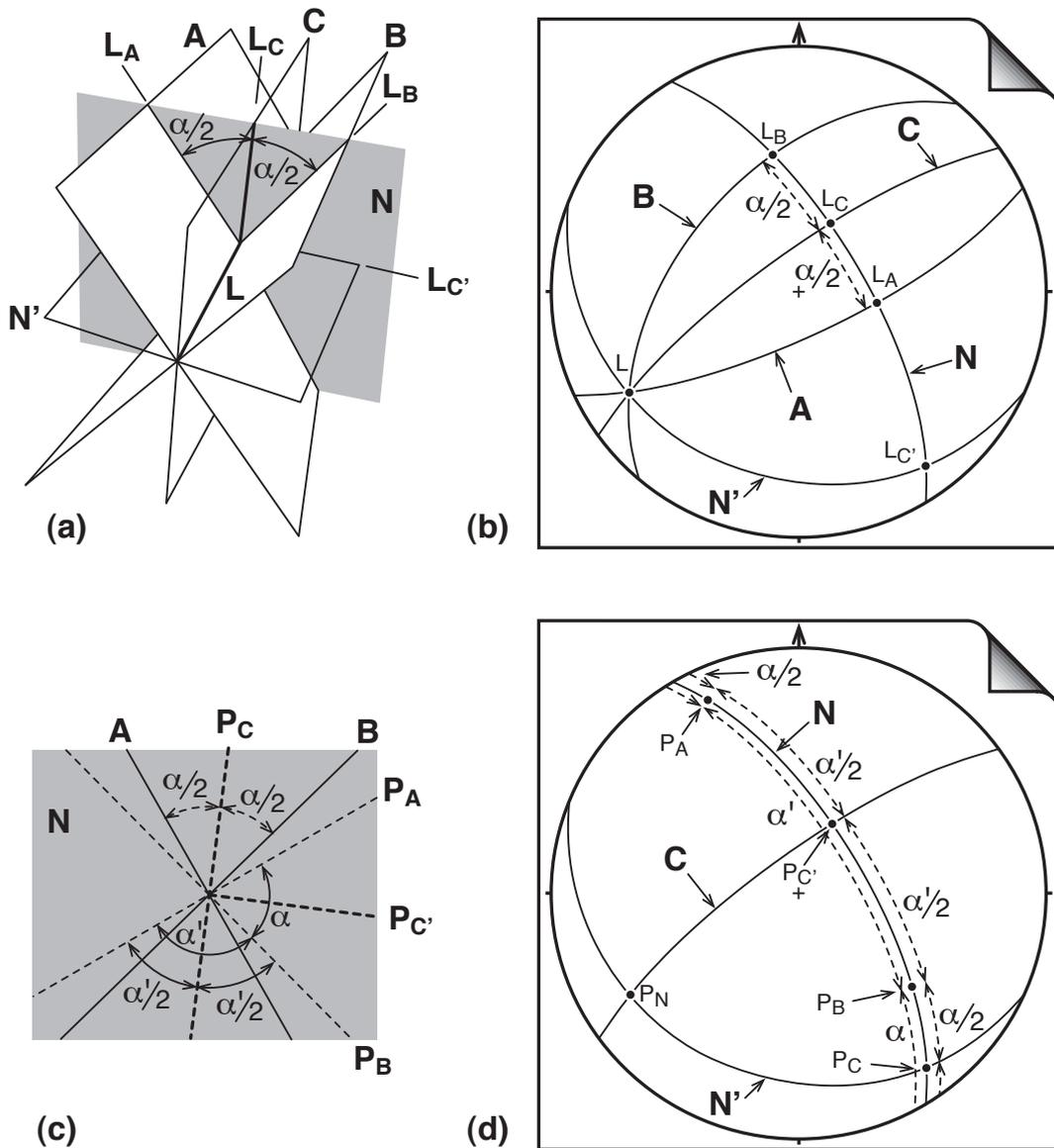
#### Metodo con le tracce ciclografiche dei piani

- Si riportano in proiezione stereografica le tracce ciclografiche dei due piani (grandi cerchi A e B in Fig. 5.8b).
- L'intersezione tra le due tracce definisce il punto L che rappresenta la linea d'intersezione tra i due piani.
- Si riporta come traccia ciclografica il piano il cui polo è il punto L, questa traccia (N) rappresenta il piano N di Fig. 5.8a. L'intersezione tra la traccia N e le tracce dei due piani (A e B) definiscono le due linee  $L_A$  e  $L_B$ .
- Misurare l'angolo acuto  $\alpha$  tra  $L_A$  e  $L_B$  e trovare il punto  $L_C$  bisettore tra  $L_A$  e  $L_B$ .  $L_C$  è il punto che dista il valore angolare  $\alpha/2$  da  $L_A$  o  $L_B$  sulla traccia ciclografica N.
- Disegnare il grande cerchio che passa per L e  $L_C$ , questo rappresenta il piano C, bisettore acuto dei piani A e B.

#### Metodo con i poli dei piani

Dalla Fig. 5.8c è possibile notare come il piano C bisettore acuto dei piani A e B ha la sua normale PC che è anche la bisettrice acuta delle normali dei piani A e B ( $P_A$  e  $P_B$ ). Per determinare il piano C bisogna quindi:

- Riportare in proiezione stereografica i poli dei piani A e B ( $P_A$  e  $P_B$  in Fig. 5.8c).
- Determinare la traccia ciclografica N che contiene i due poli, questa traccia rappresenta il piano N di Fig. 5.8a e Fig. 5.8c. Il polo del piano N, il punto PN, è la linea intersezione dei due piani A e B. Sulla traccia ciclografica N è quindi possibile individuare tra i poli  $P_A$  e  $P_B$  un angolo acuto  $\alpha$  e un angolo ottuso  $\alpha'$ .



**Figura 5.8** Piano bisettore tra due piani. (a) e (b) Metodo mediante tracce ciclografiche. (c) e (d) Metodo mediante i poli dei piani. Il piano A ha orientazione 155/75, il piano B 310/50.  $L=239/21$ ,  $L_A=98/64$ ,  $L_B=350/43$ , il piano N=59/69,  $L_C=25/65$ ,  $L_{C'}=144/14$ , il piano  $N'=202/25$ , l'angolo acuto  $\alpha$  tra  $L_A$  e  $L_B$  è  $60^\circ$ , l'angolo ottuso  $\alpha'=120^\circ$ . Il piano C ha giacitura 324/77. In (d)  $P_N=L$ ,  $P_C=L_C$ ,  $P_{C'}=L_{C'}$ .

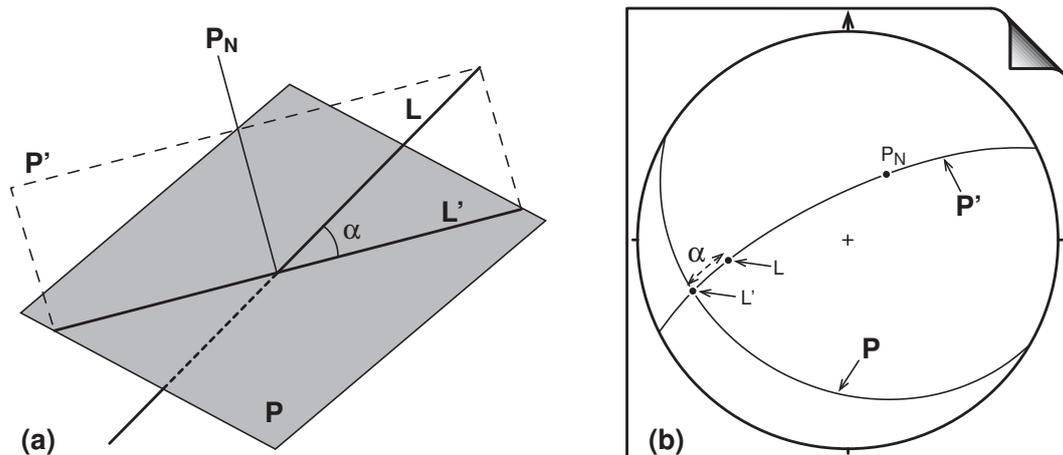


Figura 5.9 Proiezione di una linea su un piano inclinato. La linea  $L$  ha orientazione  $260/42$ , il piano  $P$  ha giacitura  $210/30$ , la proiezione  $L'$  è orientata  $252/24$ . L'angolo  $\alpha$  tra  $L$  e  $L'$  è  $20^\circ$ .

- c) Sempre sulla traccia ciclografica  $N$  si individua ora il punto  $P_C$  bisettore dell'angolo acuto  $\alpha$  e il punto  $P_{C'}$  bisettore dell'angolo ottuso  $\alpha'$ .
- d) Il piano  $C$  che passa per  $P_{C'}$  e  $P_N$  è il piano cercato, cioè il piano bisettore acuto dei piani  $A$  e  $B$ .

Se si vuole determinare anche il piano bisettore dell'angolo ottuso dei piani  $A$  e  $B$  ciò è a questo punto molto facile, esso è il piano che passa per  $P_N$  e  $P_C$  cioè la traccia ciclografica  $N'$  in Fig. 5.8d.

È importante notare che entrambe le costruzioni viste in questo capitolo hanno permesso di determinare oltre al piano acuto e ottuso bisettore di due piani, anche tre direzioni tra loro ortogonali (linee  $L$ ,  $L_{C'}$  e  $L_C$  in Fig. 5.8b e linee  $P_N$ ,  $P_{C'}$  e  $P_C$  in Fig. 5.8d) di cui una è l'intersezione tra i due piani e le altre due sono la bisettrice acuta e ottusa tra i due piani. Se i piani rappresentano due faglie in affioramento sviluppatasi contemporaneamente, le tre direzioni rappresentano l'orientazione dei tre sforzi principali che hanno originato le faglie:  $L_C$  e  $P_{C'}$  sono l'orientazione di  $\sigma_1$ ,  $L$  e  $P_N$  l'orientazione di  $\sigma_2$ ,  $L_{C'}$  e  $P_C$  l'orientazione di  $\sigma_3$ .

#### Esercizio 14

Determinare le giaciture dei piani bisettori delle seguenti coppie di piani:

- piano  $20/50$  e piano  $340/40$ ;
- piano  $190/30$  e piano  $155/40$ ;
- piano  $70/60$  e piano  $110/55$ .

Soluzioni a pagina 76.

## 5.8 Proiezione di una linea su un piano

Consideriamo un piano  $P$  e una linea  $L$  non parallela al piano. Se immaginiamo una sorgente luminosa posta a distanza infinita sopra il piano, l'ombra della linea sul piano è la proiezione ortogonale  $L'$  della linea  $L$  sul piano  $P$  ( Fig. 5.9a). Per determinare la proiezione di una linea su un piano facendo uso delle proiezioni stereografiche la procedura è la seguente:

- Riportare in proiezione stereografica (Fig. 5.9b) il piano sia come polo ( $P_N$ ) che come traccia ciclografica ( $P$ ), riportare anche la linea  $L$ .
- Tracciare il grande cerchio ( $P'$ ) che passa per  $P_N$  e  $L$ .
- Il punto di intersezione tra  $P'$  e  $P$  è la linea  $L'$  proiezione della linea  $L$  sul piano  $P$ .

#### Esercizio 15

Determinare la giacitura (direzione di immersione ed inclinazione) delle proiezioni delle seguenti linee sui seguenti piani:

- linea  $306/58$  sul piano  $280/40$ ;

- b) linea 210/32 sul piano 120/70;
- c) linea 120/40 sul piano 220/68.

Soluzione a pagina 76.

## 5.9 Angolo tra un piano e una linea

Determinare l'angolo tra un piano (P) e una linea (L) significa misurare l'angolo tra la linea e la sua proiezione (L') su tale piano.

In proiezione stereografica per determinare L' si procede come indicato nel Capitolo 5.8 e illustrato in Fig. 5.9.

Una volta determinato L', sulla traccia ciclografica P' (piano che contiene la linea e il polo del piano) è possibile leggere immediatamente l'angolo  $\alpha$  tra L e L' (Fig. 5.9b), come illustrato nel Capitolo 5.5.

### Esercizio 16

Determinare l'angolo tra i seguenti piani e linee:

- a) piano 258/42 e linea 270/20;
- b) piano 110/25 e linea 102/62;
- c) piano 10/50 e linea 350/11.

Soluzioni a pagina 76.

## 5.10 Rotazioni attorno ad un asse

In molti problemi geologici vi è la necessità di ruotare piani o linee attorno ad un asse. Le procedure illustrate in seguito per effettuare rotazioni usando le proiezioni stereografiche possono essere applicate indifferentemente a linee o a piani, in quanto anche i piani, come già visto, possono essere rappresentati in proiezione stereografica da una linea, la linea normale al piano (polo del piano). In questo capitolo, di conseguenza, verrà sempre considerata la rotazione di linee attorno ad un asse. La procedura è la solita, sia utilizzando il reticolo di Wulff, sia utilizzando quello di Schmidt.

È importante ricordare che per potere effettuare qualsiasi rotazione è necessario conoscere l'orientazione della linea che deve essere ruotata, l'orientazione dell'asse di rotazione, l'angolo di rotazione e infine il senso di rotazione (orario/antiorario). Per evitare ambiguità per convenzione il senso di rotazione (senso orario o senso antiorario) sarà sempre specificato guardando verso la direzione di immersione dell'asse di rotazione.

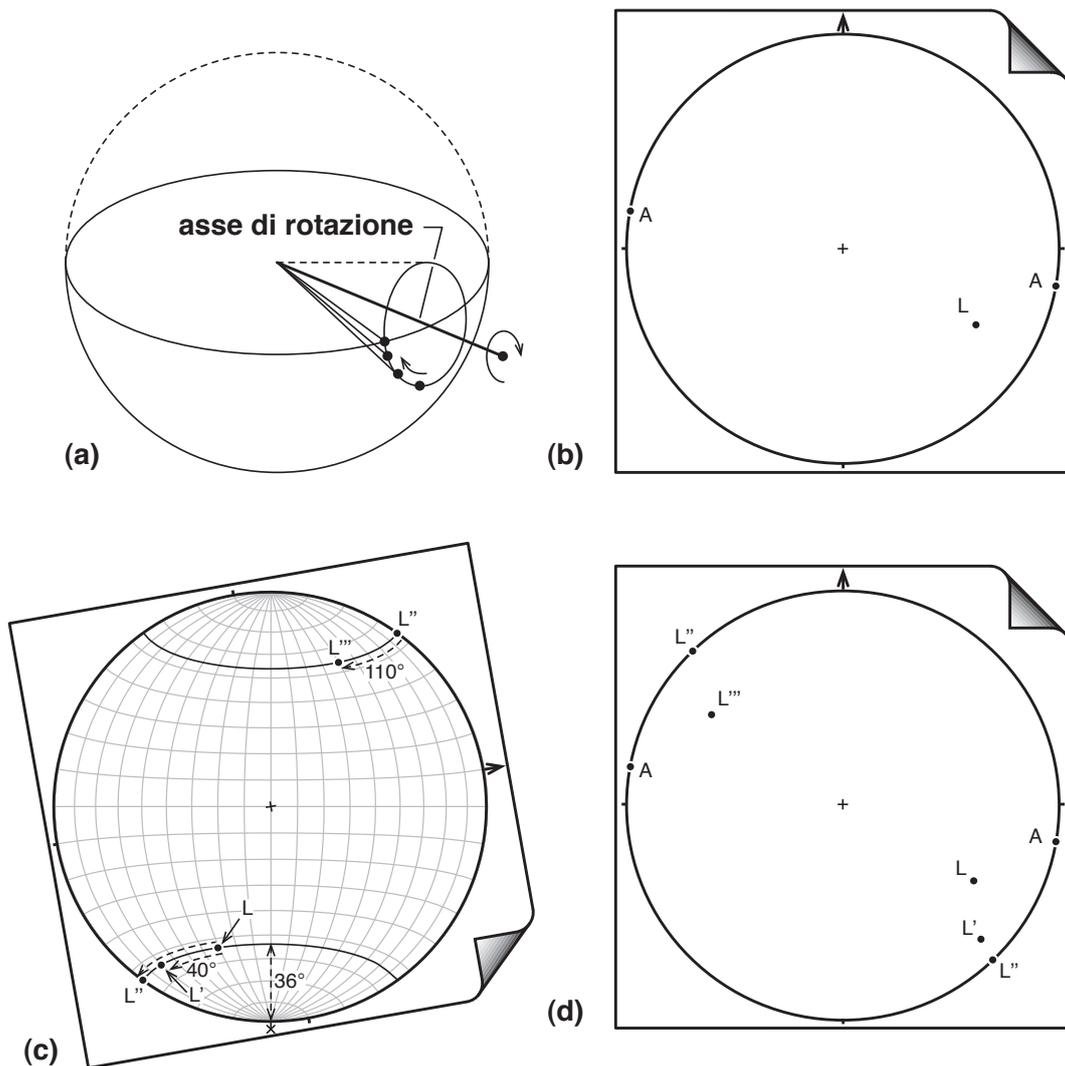
La rotazione di una linea attorno ad un asse definisce un cono, che in proiezione stereografica è rappresentato da un piccolo cerchio. La rotazione di una linea in proiezione stereografica avviene quindi su dei piccoli cerchi, bisogna per questo motivo avere ben presente la proiezione di coni variamente inclinati illustrata nel Capitolo 4.5. Applicazioni pratiche della rotazione attorno ad un asse (restaurazione di discordanze e paleocorrenti) sono riportate in Appendice a pag. 71.

### 5.10.1 Rotazione attorno ad un asse verticale

La rotazione di una linea attorno ad un asse verticale di un angolo di rotazione  $\alpha$  è il caso più semplice di rotazione. La procedura è la seguente (es. per ruotare la linea A di Fig. 4.6a):

- a) Disegnare il piccolo cerchio con asse verticale, concentrico con il cerchio di riferimento, che passa per tale linea (cerchio C1 in Fig. 4.6a).
- b) Con l'aiuto di un semplice goniometro tracciare l'angolo  $\alpha$  sul cerchio C1 e trovare così la nuova orientazione A' della linea (in Fig. 4.6a  $\alpha=50^\circ$ ).

È importante notare che se si conosce l'orientazione della linea da ruotare (es. la linea A di Fig. 4.6a ha orientazione 200/60) per ruotarla attorno ad un asse verticale non è necessario effettuare la procedura precedente. La nuova orientazione della linea (A') avrà la solita inclinazione, ma direzione di immersione sarà aumentata dell'angolo di rotazione se la rotazione è in senso orario, oppure diminuita di un valore angolare pari all'angolo di rotazione se la rotazione è in senso antiorario. Nell'esempio precedente è quindi facile stabilire che A' ha orientazione 250/60.



**Figura 5.10** Rotazione attorno ad un asse orizzontale. (a) Rotazione all'interno della sfera di proiezione. (b) Rotazione di una linea  $L$  di orientazione  $120/30$  attorno ad un asse  $100/00$ . (c) La linea  $L$  giace sul piccolo cerchio di apertura  $36^\circ$ . La rotazione di  $40^\circ$  porta alla linea  $L'$ , la rotazione di  $60^\circ$  porta alla linea  $L''$ , la rotazione di  $110^\circ$  alla linea  $L'''$ . (d) La linea  $L'$  è orientata  $134/11$ , la linea  $L''$  è orientata  $136/00$  e la linea  $L'''$  è orientata  $304/27$ .

#### Esercizio 17

Determinare la giacitura delle seguenti linee dopo una rotazione attorno ad un asse verticale:

- linea  $26/16$  ruotata di  $46^\circ$  in senso orario;
- linea  $208/54$  ruotata di  $20^\circ$  in senso orario;
- linea  $332/76$  ruotata di  $70^\circ$  in senso antiorario.

Soluzione a pagina 76.

#### 5.10.2 Rotazione attorno ad un asse orizzontale

La rotazione di una linea attorno ad un asse orizzontale è illustrata in Fig. 5.10a, la rotazione in questo caso è in senso antiorario, secondo la convenzione precedente. La linea si muove attorno all'asse di rotazione definendo un cono, in proiezione stereografica la linea si sposta lungo un piccolo cerchio al cui centro è posto l'asse di rotazione. Nella pratica se si vuole ruotare una linea  $L$  attorno ad un asse  $A$  orizzontale di un angolo  $\alpha$  bisogna:

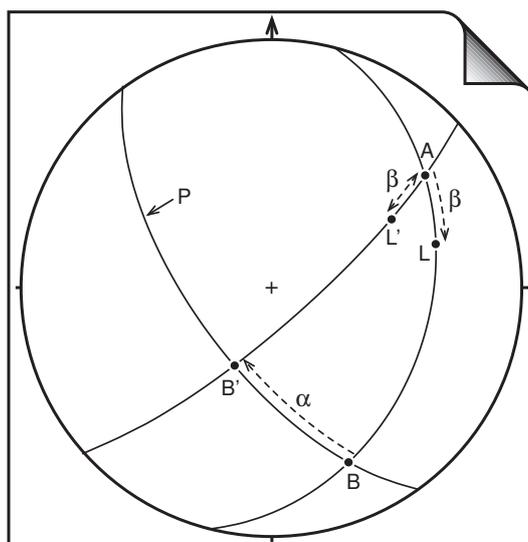


Figura 5.11 Rotazione della linea L (giacitura 75/32) attorno all'asse A (giacitura 54/25) di un'angolo  $\alpha=50^\circ$  in senso orario. La linea L' (giacitura 61/44) è la giacitura finale della linea L. L e L' formano un angolo  $\beta=20^\circ$  con l'asse di rotazione A.

- Riportare in proiezione stereografica la linea L e l'asse A (Fig. 5.10b). L'asse A è orizzontale e perciò è rappresentato da due punti diametralmente opposti sul cerchio di riferimento.
- Ruotare il foglio trasparente fino a portare l'asse A a coincidere con il diametro N-S del reticolo (Fig. 5.10c).
- In questa posizione disegnare il piccolo cerchio che passa per la linea L. Su questo piccolo cerchio spostarsi di un valore angolare pari all'angolo di rotazione  $\alpha$ . In Fig. 5.10c si vede come una rotazione antioraria di  $40^\circ$  porta la linea L ad assumere la nuova orientazione L', una rotazione di  $60^\circ$  porta ad una giacitura orizzontale (L'') e una rotazione antioraria di  $110^\circ$  ad una nuova orientazione L''', dalla parte opposta dello stereogramma.
- Riportare il foglio trasparente nella posizione originaria e stabilire l'orientazione delle nuove linee (Fig. 5.10d).

### Esercizio 18

Determinare la giacitura delle seguenti linee dopo averle ruotate attorno ad un asse orizzontale:

- linea 40/26 ruotata di  $15^\circ$  in senso orario attorno all'asse di giacitura 86/0;
- linea 80/42 ruotata di  $52^\circ$  in senso antiorario attorno all'asse di giacitura 116/0;
- linea 202/38 ruotata di  $62^\circ$  in senso orario attorno all'asse di giacitura 250/0.

Soluzione a pagina 76.

### 5.10.3 Rotazione attorno ad un asse inclinato

Il metodo più semplice per ruotare una linea attorno ad un asse inclinato fa uso delle tracce ciclografiche; in molti testi viene illustrato il metodo, un po' più complicato, che fa uso di una doppia rotazione attorno a due assi orizzontali. In questo capitolo verranno illustrati entrambi i metodi.

#### Metodo delle tracce ciclografiche

Supponiamo di dovere ruotare una linea L attorno ad un asse inclinato A di un'angolo  $\alpha$  in senso orario. La procedura è la seguente (Fig. 5.11):

- Proiettare la linea L e l'asse di rotazione A. Proiettare anche il grande cerchio (P) il cui polo è l'asse A.
- Costruire il grande cerchio che passa per L e A. Su questa traccia ciclografica misurare l'angolo  $\beta$  tra L e A e determinare il punto B in cui essa interseca il grande cerchio P.

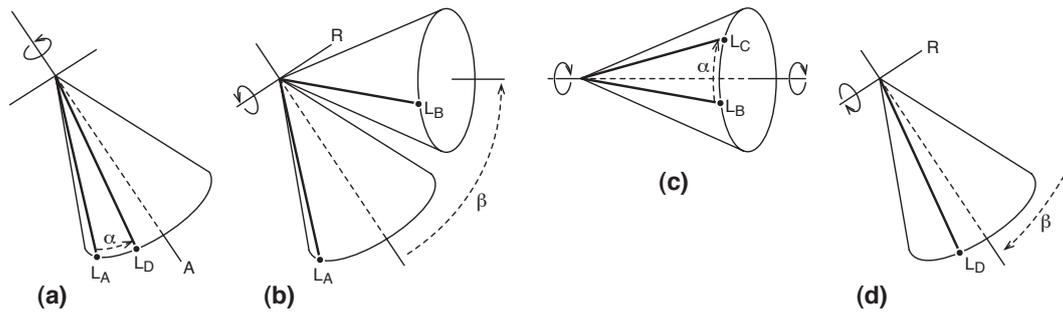


Figura 5.12 Rotazione di una linea attorno ad un asse inclinato mediante due rotazioni successive.

- c) Sulla traccia ciclografica P spostarsi dell'angolo di rotazione  $\alpha$  e determinare così il punto B'.
- d) Tracciare il grande cerchio che passa per B' e A.
- e) Su questa traccia ciclografica tracciare l'angolo  $\beta$  partendo dal punto A. Il punto L' così determinato è la nuova orientazione della linea L alla fine della rotazione  $\alpha$ .

Si noti che L e L' giacciono sul piccolo cerchio con asse A e apertura  $\beta$ , questo metodo di rotazione di linee permette quindi di proiettare una serie di punti che si trovano su un piccolo cerchio ed è stato utilizzato per disegnare il piccolo cerchio di Fig. 4.6e.

#### Metodo della doppia rotazione

Supponiamo di dover ruotare la linea  $L_A$  in senso antiorario attorno all'asse inclinato A di un valore angolare  $\alpha$  ( Fig. 5.12a).

Questo metodo si basa sul fatto che la rotazione attorno ad un asse inclinato può essere realizzata portando l'asse A all'orizzontale ruotandolo attorno ad un asse orizzontale R ortogonale alla direzione di immersione dell'asse A e facendo assumere alla linea  $L_A$  una nuova orientazione  $L_B$  (Fig. 5.12b). Si ruota a questo punto la linea  $L_B$  dell'angolo  $\alpha$  fino ad assumere la giacitura  $L_C$  (Fig. 5.12c). Si ruota infine l'asse A nella sua posizione originaria, la linea assume la sua posizione finale  $L_D$  ( Fig. 5.12d).

Nella pratica la procedura da seguire è la seguente:

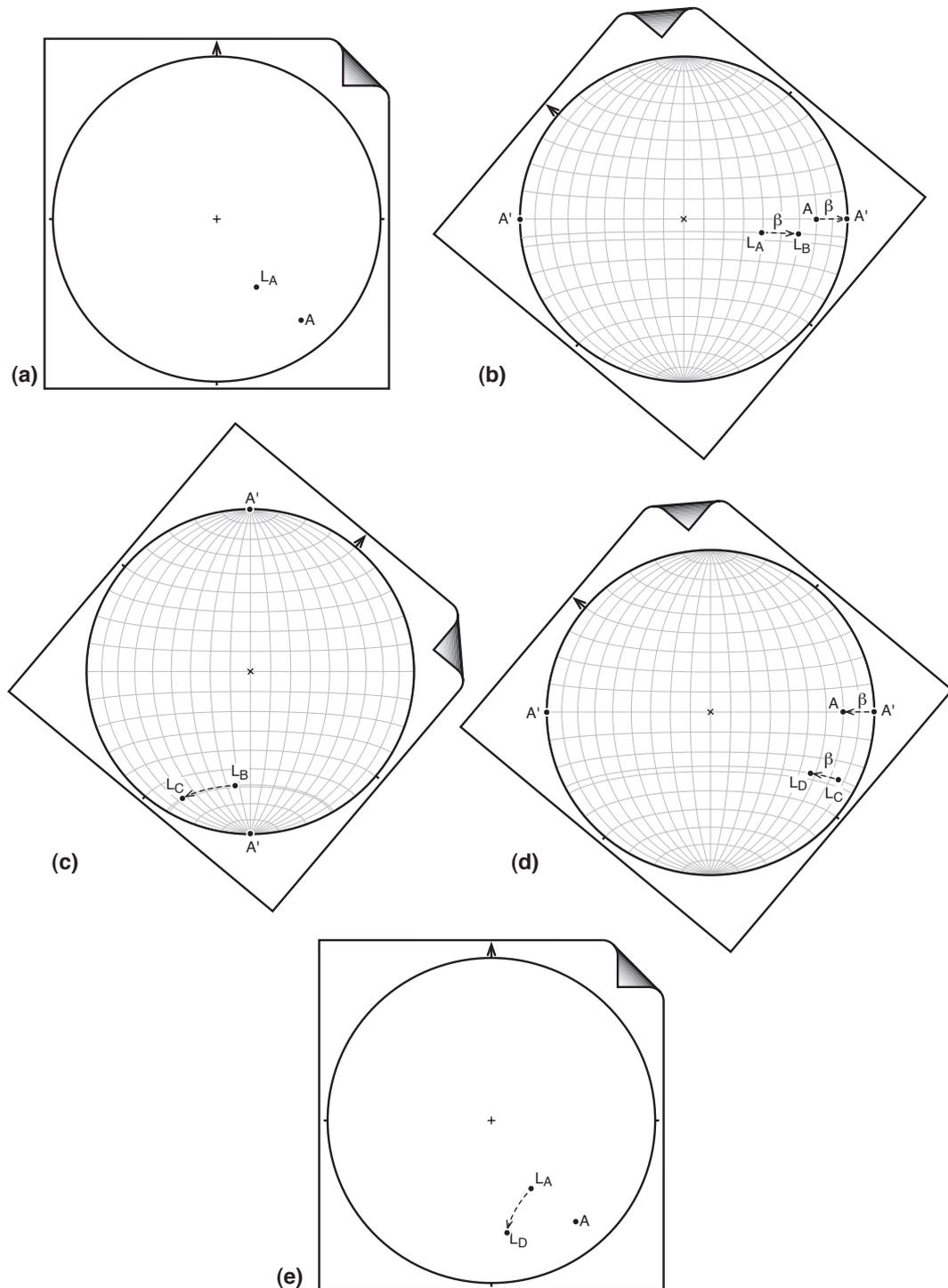
- a) Proiettare la linea  $L_A$  e l'asse di rotazione A (Fig. 5.13a).
- b) Ruotare il foglio trasparente fino a portare l'asse di rotazione A a giacere sul diametro Est- Ovest del reticolo di proiezione (Fig. 5.13b).
- c) Portare l'asse A all'orizzontale spostandolo di un valore angolare pari alla sua inclinazione  $\beta$  e spostando la linea  $L_A$  sul piccolo cerchio su cui viene a trovarsi del solito valore angolare  $\beta$ . La linea si troverà nella nuova posizione  $L_B$  (Fig. 5.13b).
- d) Portare l'asse A a coincidere con il diametro Nord-Sud del reticolo e ruotare la linea  $L_B$  dell'angolo di rotazione  $\alpha$ , in senso antiorario nell'esempio di Fig. 5.13c. La linea avrà ora orientazione  $L_C$ .
- e) Ruotare il foglio trasparente fino a portare l'asse di rotazione A nuovamente a giacere sul diametro Est-Ovest del reticolo (Fig. 5.13d). Portare l'asse A nella sua posizione originaria inclinandolo del valore angolare  $\beta$ , inclinare anche la linea  $L_C$  del solito valore angolare spostandola lungo il piccolo cerchio su cui viene a trovarsi. La linea assume ora la posizione finale  $L_D$ .
- f) Portare il foglio trasparente nella posizione originaria, è possibile osservare lo spostamento della linea dalla posizione iniziale  $L_A$  a quella finale  $L_D$  (Fig. 5.13e).

#### Esercizio 19

Determinare la giacitura delle seguenti linee dopo averle ruotate attorno ad un asse inclinato:

- a) linea 335/46 ruotata di  $26^\circ$  in senso antiorario attorno all'asse di giacitura 20/18;
- b) linea 132/14 ruotata di  $42^\circ$  in senso orario attorno all'asse di giacitura 150/26;
- c) linea 230/60 ruotata di  $50^\circ$  in senso orario attorno all'asse di giacitura 280/25.

Soluzione a pagina 76.



**Figura 5.13** Rotazione di una linea  $LA$  di orientazione  $150/50$  attorno ad un asse orientato  $140/20$  di un valore angolare  $\alpha=50^\circ$  in senso antiorario. Alla fine della rotazione la linea ha orientazione  $LD=172/31$ . L'angolo  $\beta$  è l'inclinazione dell'asse  $A$ , cioè  $20^\circ$ .

## Capitolo 6

# Analisi statistica

Se si vuole analizzare statisticamente la distribuzione di punti all'interno di uno stereogramma i punti vanno proiettati usando la proiezione equiarea, cioè il reticolo di Schmidt. Questo è necessario perché questa proiezione conserva le aree, mentre quella equiangolare (reticolo di Wulff) produce una distorsione delle aree, che risultano essere più piccole al centro dello stereogramma e anche i punti più ravvicinati verso il centro dello stereogramma. Queste proprietà sono già state discusse nel Capitolo 3.4 e illustrate in Fig. 3.6 e in Fig. 6.1.

La distribuzione statistica di punti in una proiezione stereografica (linee o poli di piani) è più facilmente rappresentabile facendo uso di linee che individuano aree al cui interno la densità di punti è costante (Fig. 6.2). Questa rappresentazione è utile se si vuole confrontare la distribuzione di punti tra stereogrammi con numero di punti differenti o tra stereogrammi di dimensioni differenti. Esistono vari metodi per calcolare la densità di punti in uno stereogramma, la maggior parte di questi metodi si basa sul calcolo del numero di punti che ricadono all'interno di un'area campione.

La procedura più semplice per realizzare in proiezione stereografica una rappresentazione statistica di dati mediante linee di uguale percentuale (*contouring*) è la seguente e consiste di quattro fasi: preparazione del materiale necessario, conteggio dei punti, determinazione delle classi percentuali e disegno delle linee. Vediamo queste varie fasi, partendo dalla preparazione del materiale necessario:

- a) Disegnare un reticolo (foglio A in Fig. 6.3a) costituito da quadrati di lato uguale a un decimo del raggio dello stereogramma. Se lo stereogramma ha il raggio di 10 cm (oppure 5 cm) il reticolo dovrà avere quadrati di lato 1 cm (oppure 0,5 cm) e potrà essere usato a questo fine un foglio di carta millimetrata.
- b) Riportare le linee in proiezione stereografica utilizzando il reticolo di Schmidt. Seguendo le indicazioni illustrate nei capitoli precedenti i punti saranno riportati in proiezione stereografica su un foglio di carta lucida trasparente (foglio B in Fig. 6.3a).
- c) Prendere un'altro foglio di carta lucida trasparente, per ora vuoto (foglio C in Fig. 6.3a).
- d) Posizionare i tre fogli in quest'ordine: in basso il reticolo quadrettato, sopra i punti proiettati e quindi sopra il foglio trasparente. Con del nastro adesivo fissare tutti questi fogli tra loro e anche al tavolo di lavoro. A questo punto dovrebbe essere possibile vedere in trasparenza sia i punti proiettati che il reticolo quadrettato (Fig. 6.3b).
- e) Disegnare su di un pezzo di carta trasparente lucida una piccola circonferenza di raggio pari ad un decimo del raggio dello stereogramma ( Fig. 6.3c), l'area sarà uguale ad un centesimo di quella dello stereogramma.
- f) Disegnare su di una striscia di carta trasparente lucida due circonferenze di raggio pari ad un decimo del raggio dello stereogramma e distanti tra loro di una lunghezza pari a quella del diametro dello stereogramma ( Fig. 6.3d). Dovrà inoltre essere disegnata una linea che passa per i centri delle due circonferenze.

A questo punto possono iniziare le procedure di conteggio dei punti:

- a) Il conteggio viene fatto posizionando il centro della piccola circonferenza su di un vertice del reticolo quadrettato e contando il numero dei punti che ricadono completamente all'interno della

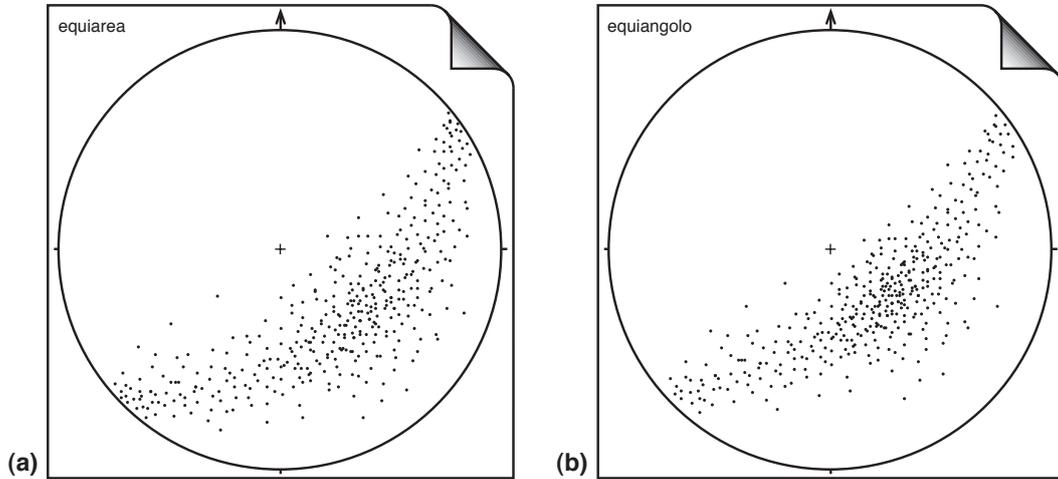


Figura 6.1 Confronto tra proiezione equiarea ed equiangolo di 400 linee. (a) Le linee sono state riportate in proiezione stereografica usando il reticolo di Schmidt. (b) Le solite linee sono state riportate usando il reticolo di Wulff. Si noti come la distribuzione sia diversa, la proiezione stereografica equiangolo provoca un apparente addensamento dei punti nella parte centrale dello stereogramma.

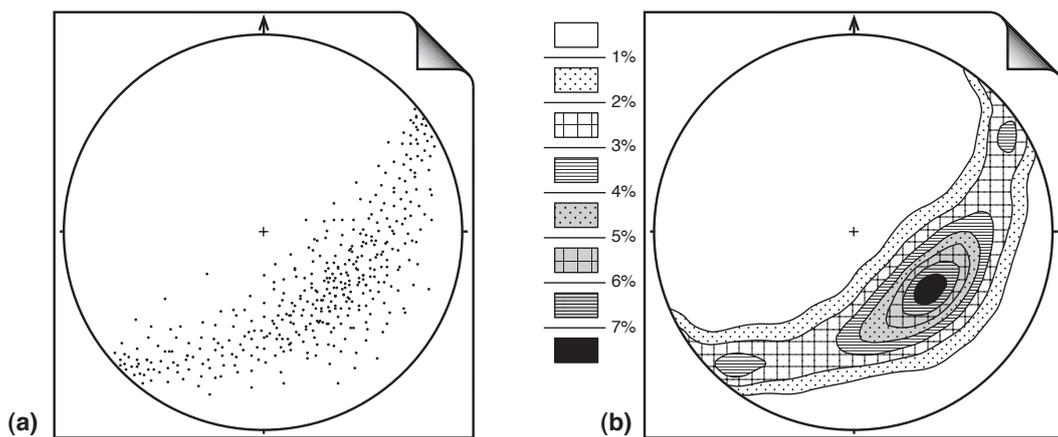


Figura 6.2 (a) Proiezione stereografica di 400 linee (reticolo di Schmidt). (a) Rappresentazione statistica dei soliti punti. Le linee individuano aree al cui interno è costante la percentuale di punti presenti.

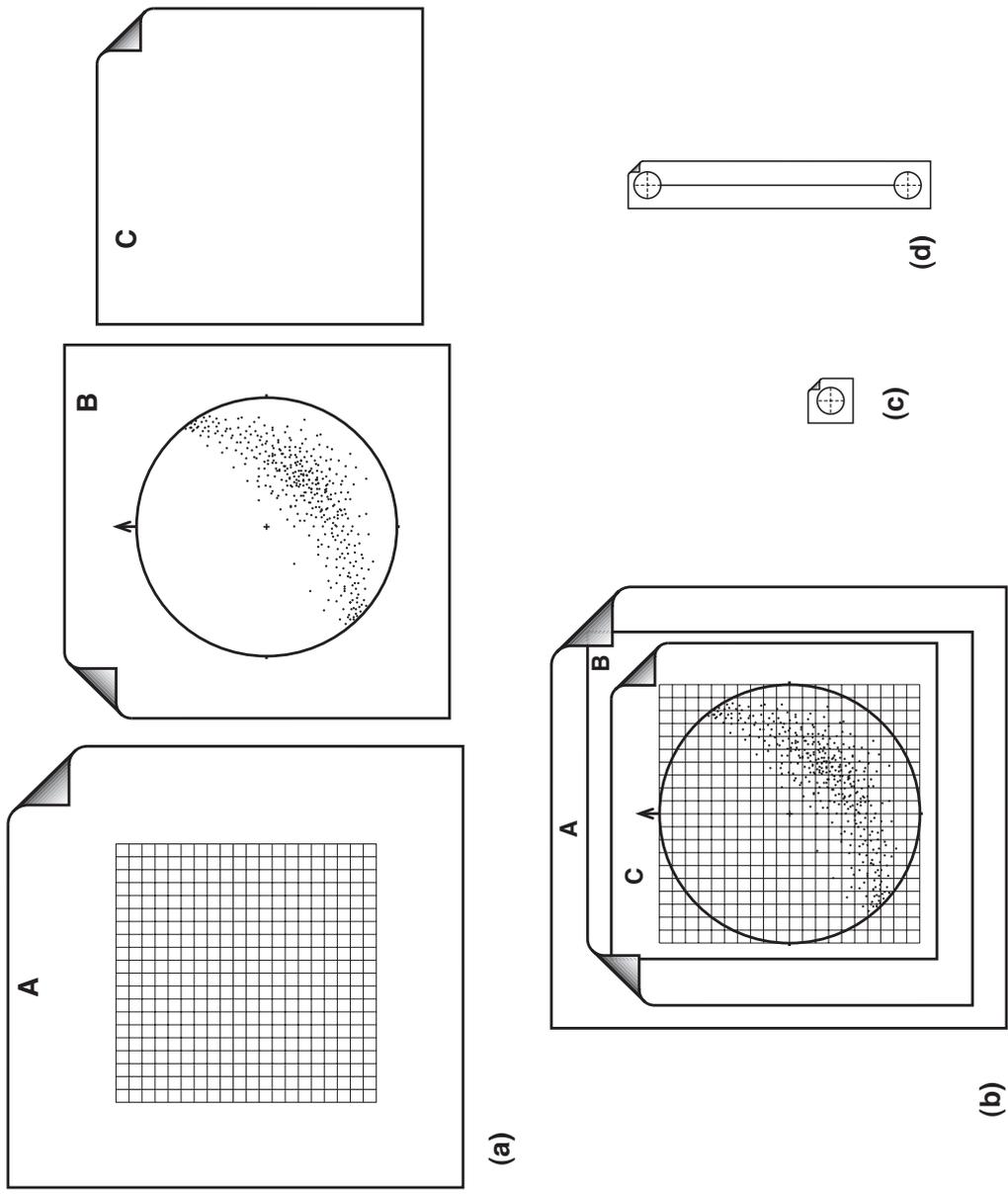


Figura 6.3 materiale necessario e preparazione per eseguire l'analisi statistica di una proiezione stereografica.

Tabella 6.1 Classi percentuali e numero di punti per uno stereogramma con un numero totale di punti  $N=400$ .

Classe percentuale	Numero di Punti
1%	4
2%	8
3%	12
4%	16
5%	20
6%	24
7%	28

- circonferenza (Fig. 6.2a).
- b) Si sposta il piccolo foglio di carta trasparente con la circonferenza e sul foglio sottostante si segna il vertice del quadrettato su cui è stata posizionata la circonferenza e a fianco il numero dei punti contati all'interno della circonferenza.
- c) Si ripete questa operazione per tutti i vertici del reticolo quadrettato.
- d) Quando posizionando la piccola circonferenza in corrispondenza di un vertice una parte di questa finisce al di fuori dello stereogramma, va usata la coppia di circonferenze disegnata in precedenza. La procedura è la seguente:
- i. Si posiziona una delle due circonferenze in corrispondenza del vertice del reticolo, facendo attenzione che la linea che unisce le due circonferenze passi esattamente per il centro dello stereogramma (Fig. 6.4).
  - ii. Si contano i punti che ricadono in entrambe le circonferenze.
  - iii. Si toglie quindi il piccolo foglio di carta trasparente con le due circonferenze e sul foglio trasparente C si segna il vertice del quadrettato su cui è stata posizionata la prima circonferenza e a fianco la somma del numero dei punti contati in entrambe le circonferenze.
- e) Alla fine delle procedure di conteggio si dovrebbe avere un foglio di carta trasparente in cui sono riportati i vertici del reticolo quadrettato e a fianco il numero dei punti che ricadono nelle adiacenze. Questo foglio può essere separato dai sottostanti fogli (Fig. 6.4c).
- Bisogna a questo punto stabilire le varie classi percentuali delle densità che vogliamo rappresentare. All'interno di uno stereogramma di area totale  $S$  e numero totale di punti  $N$ , la densità percentuale ( $d$ ) di punti in una certa area  $S'$  che contiene  $N'$  punti è espressa come:

$$d = \frac{N'/N}{S'/S} \cdot 100$$

Nella procedura illustrata in precedenza per contare i punti sono state usate delle piccole circonferenze che sono un centesimo dell'area dello stereogramma, i numeri riportati sul foglio trasparente (Fig. 6.4c) indicano quindi il numero dei punti presenti in aree che sono un centesimo di quella dello stereogramma, che hanno il loro centro nei nodi del reticolo quadrettato. La densità percentuale in questo caso è espressa da:

$$d = \frac{N'}{N} \cdot 100$$

quindi ogni classe percentuale  $d$  deve contenere un numero di punti  $N'$  uguale a:

$$N' = \frac{d \cdot N}{100}$$

Nell'esempio di Fig. 6.3 e Fig. 6.4 i punti proiettati sono 400 perciò un'area che contiene l'1% dei punti (classe percentuale 1%) deve racchiudere 4 punti, il 2% 8 punti, il 10% 40 punti, ecc.. Esaminando il foglio trasparente (Fig. 6.4c) si stabilisce quante e quali classi percentuali rappresentare e si costruisce una tabella simile alla Tab. 6.1.

Una volta stabilite le classi bisogna disegnare le linee di uguale percentuale di punti:

- a) Si prende un nuovo foglio trasparente e lo si sovrappone al foglio su cui sono riportati i numeri di punti per 1% di area.

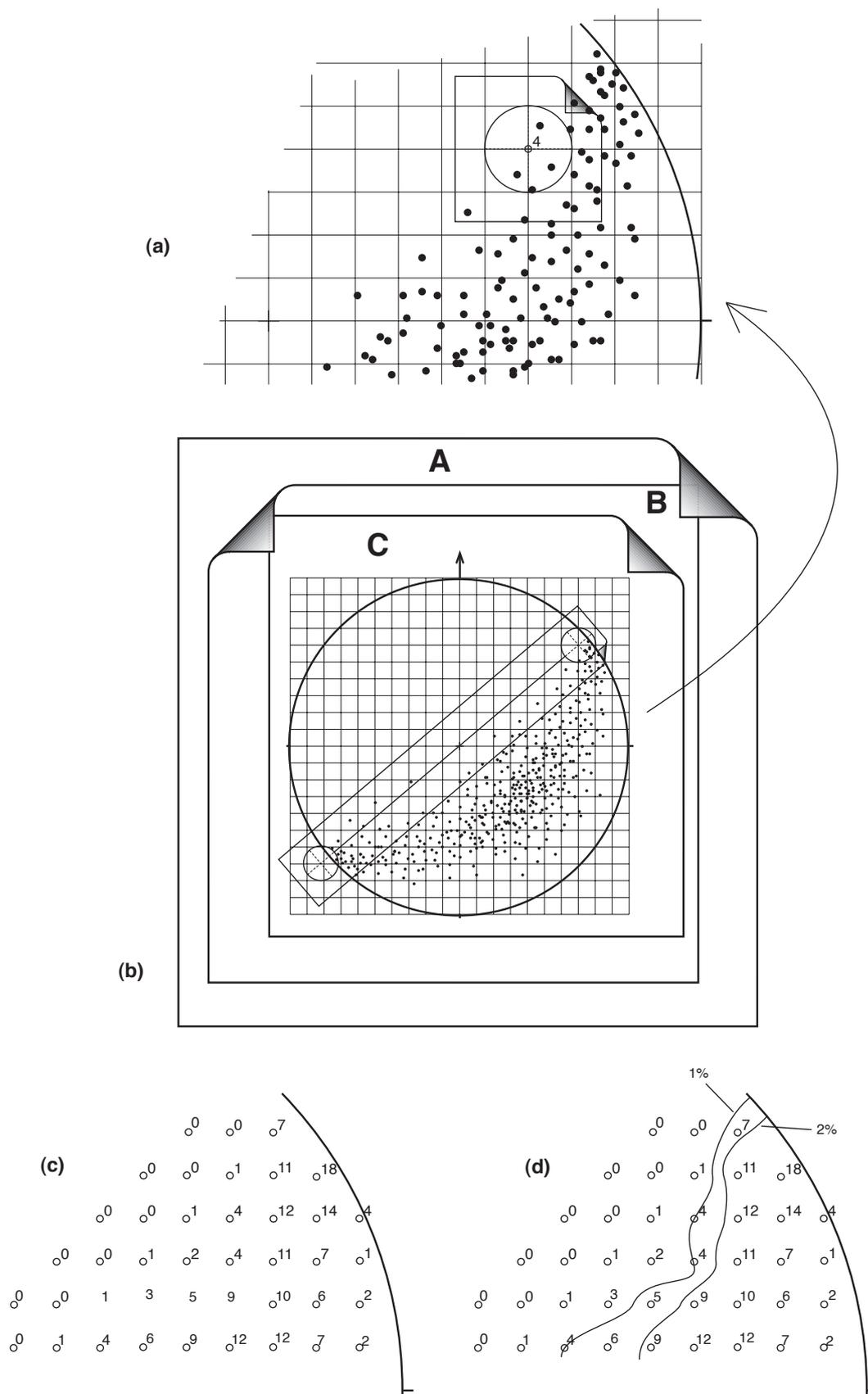
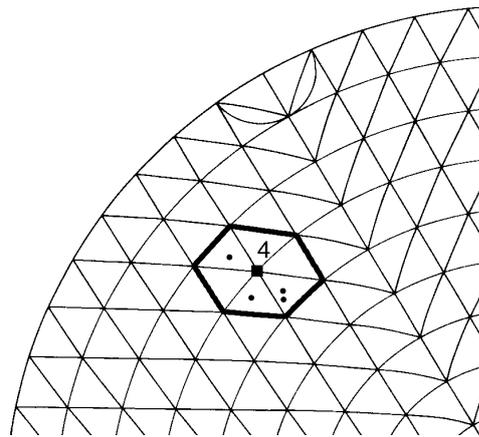


Figura 6.4 Procedura di *contouring*. (a) Particolare di uno stereogramma, con sopra la circonferenza per il conteggio dei punti. (b) Uso delle due circonferenze per il conteggio dei punti. (c) Risultato finale, il conteggio è stato effettuato per ogni punto del reticolo. (d) Disegno di due linee (classe 1% e classe 2%).

**Figura 6.5** Particolare del reticolo di Kalsbeek (vedi Fig. A.6). Ogni nodo di questo reticolo è al centro di un'area di forma circa esagonale, contando i punti all'interno di ogni area esagonale si ha un valore del contenuto percentuale di punti in quell'area (vedi Fig. 6.4c).



- b) Si disegnano le linee facendole passare per i punti che rappresentano tale classe percentuale (Fig. 6.4d). Se tali punti non esistono, bisogna introdurre delle interpolazioni manuali, supponendo che le densità varino in modo lineare tra i punti del reticolo quadrettato. In pratica, ritornando all'esempio di Fig. 6.4, la linea dell'1% che separa aree con meno di 4 punti per 1% di area da quelle con più di 4 punti per 1 di area deve passare per il punto con 4 punti per 1% di area. Se tale punto non c'è ma ci sono per esempio un punto con 0 punti e un punto con 5 punti, la linea deve passare nelle vicinanze del punto con 5 punti.
- c) Le linee non devono intersecarsi e devono essere continue in tutto lo stereogramma, cioè linee che escono dal cerchio di riferimento dello stereogramma devono rientrare nel punto diametralmente opposto del cerchio di riferimento. Il risultato finale è uno stereogramma come quello riportato in Fig. 6.2b.

Tutta la procedura illustrata in precedenza è stata introdotta nel 1928 dal geologo austriaco Oskar Schmidegg ed è quella più comunemente usata, ma esistono altri modi per ottenere la distribuzione statistica di punti all'interno di uno stereogramma. Questi altri metodi si basano sull'uso di reticoli del diametro pari al diametro dello stereogramma in cui sono disegnate varie forme (esagoni, cerchi, ellissi) le cui aree sono pari all'1% dello stereogramma. Tra i vari reticoli il più usato è quello introdotto da Kalsbeek (Fig. A.6), ma vanno ricordati anche quelli di Pronin e di Dimitrijevic. Per stereogrammi con un limitato numero di punti può essere usato il metodo di Mellis [24]. La procedura per la determinazione delle classi percentuali e delle linee è comunque sempre analoga a quella illustrata in precedenza, il vantaggio di questi reticoli particolari è che la griglia e le aree con 1% di area sono già tracciate, anche se non hanno forma circolare ( Fig. 6.5).

## Capitolo 7

# Proiezione di vettori e solidi

In alcuni campi della geologia, per esempio per affrontare problemi di stabilità di versanti, sono necessarie manipolazioni in proiezione sferica di vettori. I vettori più comuni che vengono rappresentati sono le forze (gravità, carichi, ecc.). In proiezione stereografica la direzione di un vettore è rappresentato da un punto e la rappresentazione stereografica delle forze e dei piani su cui agiscono permettono di risolvere in modo semplice molti problemi di stabilità degli ammassi rocciosi. Però in queste applicazioni bisogna tenere bene in conto anche del verso delle grandezze vettoriali; perciò si dovrà distinguere con cura tra una retta e il “suo opposto”. Per poter rappresentare solidi e vettori in proiezione planosferica si dovrà lavorare con l'intera sfera di proiezione. Si potrebbero usare due proiezioni, una per l'emisfero inferiore e un'altra per l'emisfero superiore, ma generalmente si preferisce rappresentare entrambi gli emisferi su un'unica proiezione: l'emisfero opposto al punto di proiezione (fuoco) sarà proiettato dentro la cerchio di riferimento, mentre la proiezione dell'altro emisfero cadrà fuori dal cerchio (Fig. 7.1).

La proiezione di un piano in entrambi gli emisferi può essere realizzata con la costruzione riportata in Fig. 7.2. La procedura è senz'altro semplificata usando il reticolo di proiezione riportato in Fig. A.5 a pagina 68.

In questo tipo di proiezione il piano di proiezione non è più confinato dentro al cerchio di riferimento, ma è un piano orizzontale infinito. Se il punto di proiezione è posto al vertice inferiore della sfera di proiezione (come in Fig. 7.1) l'emisfero superiore sarà proiettato sul piano di proiezione compreso dentro il cerchio di riferimento mentre l'emisfero inferiore sarà proiettato sul piano di proiezione esterno a detto cerchio. Sarà ovviamente l'inverso se il fuoco sarà posto al vertice superiore della sfera di proiezione.<sup>1</sup> Si noti che i punti che cadono sulla zona della sfera di proiezione vicina al fuoco saranno proiettati molto lontani dal centro del cerchio di riferimento; in pratica la zona prossima al fuoco non potrà essere rappresentata sulla proiezione.

Tramite la proiezione di entrambi gli emisferi è possibile distinguere le proiezioni delle linee con verso opposto (Fig. 7.3). La regione dentro al cerchio di riferimento comprende tutte le rette passanti dal centro della sfera dirette verso l'emisfero superiore (o in altre parole comprende il semispazio superiore al piano orizzontale). Al contrario il semispazio inferiore è definito dalle linee dirette verso il basso e la sua proiezione occupa tutta l'area esterna al cerchio di riferimento. Anche nel caso di un piano comunque inclinato il semispazio superiore al piano sarà rappresentato in proiezione dall'area compresa dentro la proiezione del piano e la proiezione del semispazio inferiore occupa l'area esterna alla proiezione del piano. Per esempio nella proiezione del piano 90/50 riportato in Fig. 7.4, la zona compresa nel cerchio proiezione del piano (cerchio con centro C) comprende tutte le rette che passano dal centro della sfera di proiezione e sono dirette nel semispazio superiore individuato dal piano.

Tutti i punti fuori dal cerchio con centro C (cioè tutto il resto del piano di proiezione) rappresentano l'insieme delle linee che passano dal punto 0 e che sono dirette verso il semispazio inferiore.

<sup>1</sup>Nell'analisi dei blocchi il punto di proiezione è di solito posto al vertice inferiore della sfera come in Fig. 7.3

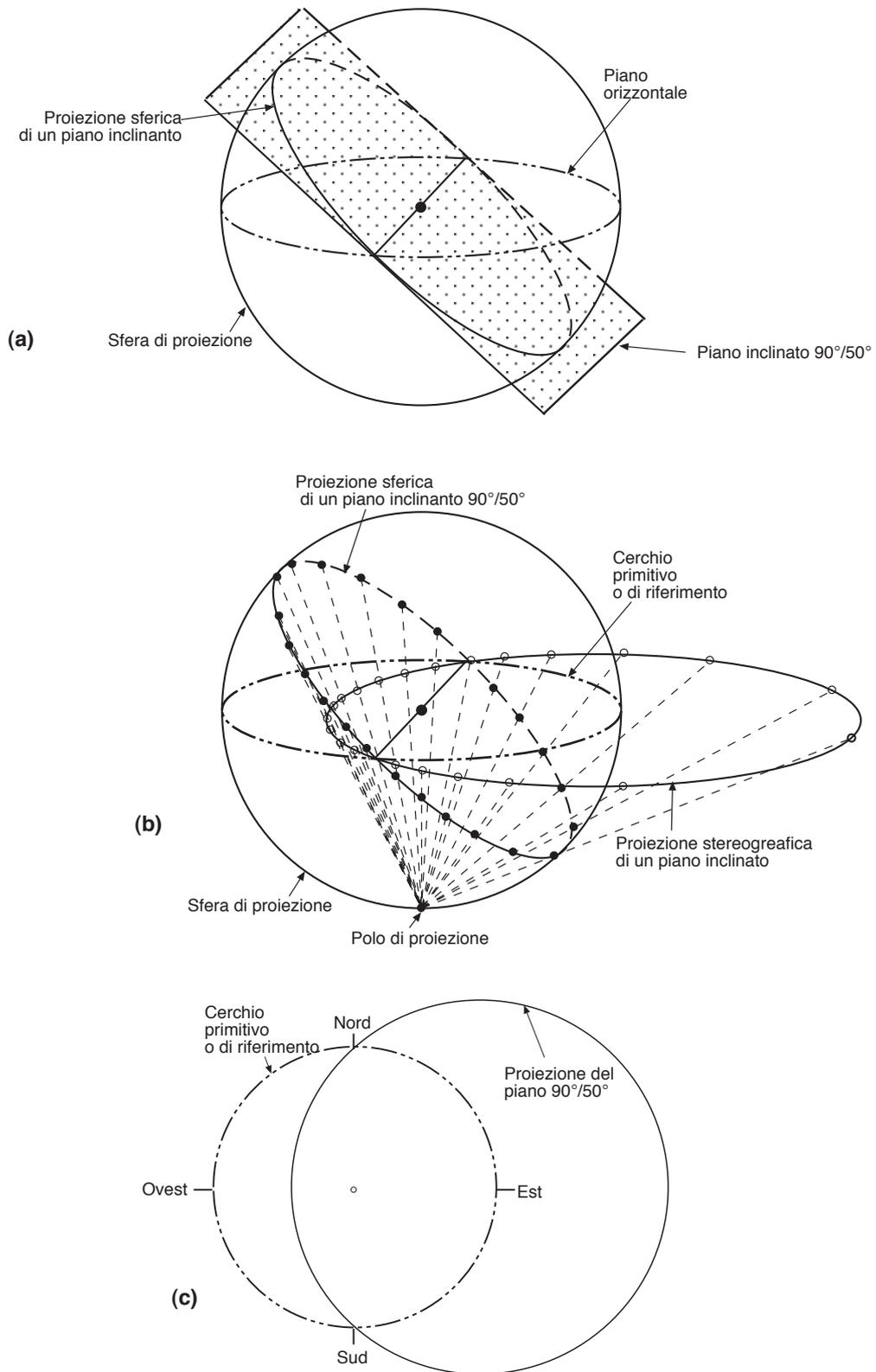


Figura 7.1 Principio di proiezione stereografica utilizzando entrambi gli emisferi; polo di proiezione inferiore.

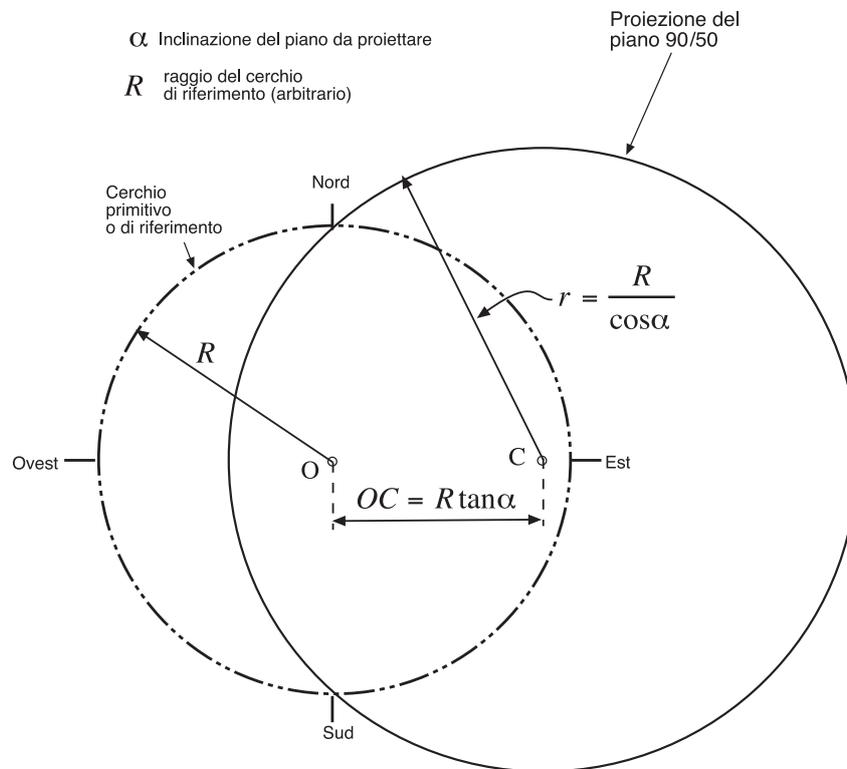


Figura 7.2 Costruzione della proiezione di un piano in entrambi gli emisferi. Punto di proiezione inferiore.

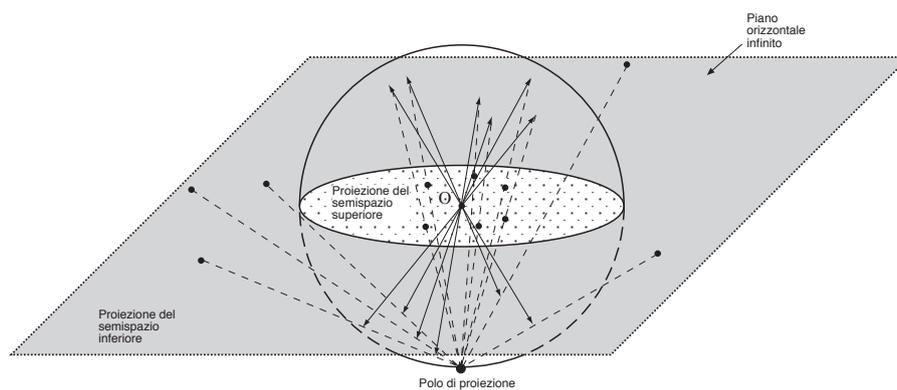
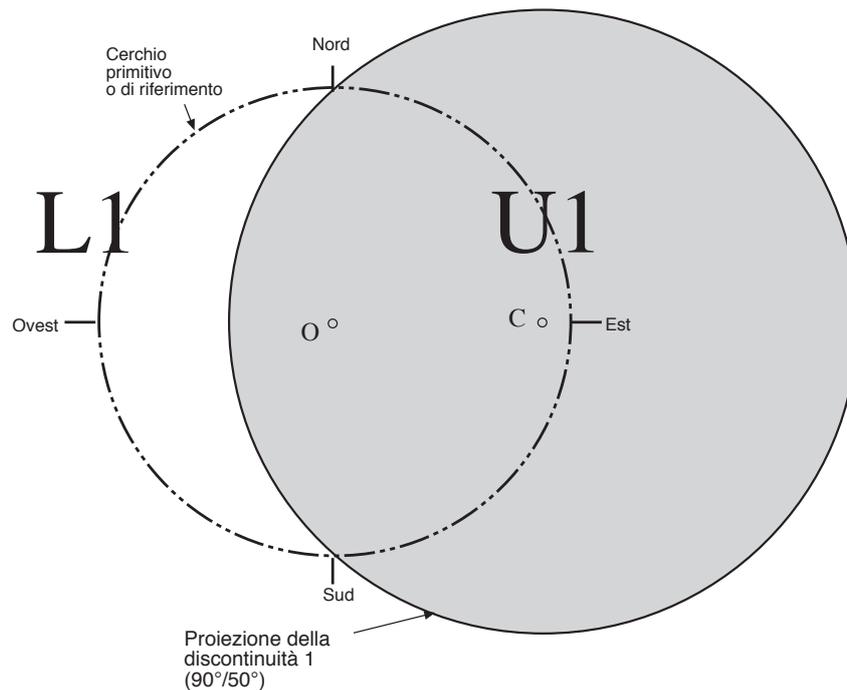


Figura 7.3 Il semispazio superiore, definito dall'insieme di rette passanti dal centro della sfera di proiezione e dirette verso l'alto, in proiezione stereografica occupa l'area interna al cerchio di riferimento. La proiezione del semispazio inferiore occupa l'area esterna al cerchio di riferimento.



**Figura 7.4** Proiezione del piano 90/50. U1: proiezione del semispazio superiore individuato dal piano 90/50. L1: proiezione del semispazio inferiore individuato dal piano 90/50.

Se il cerchio con centro C è la proiezione del sistema di discontinuità 1, allora la regione dentro al cerchio è U1 (cioè è il semispazio sopra alla discontinuità 1 e la regione fuori dal cerchio è L1 (cioè è il semispazio sotto alla discontinuità 1; Fig. 7.1).

In questo modo possiamo proiettare i semispazi individuati da un piano comunque orientato. Un solido limitato da facce piane può essere considerato come l'intersezione dei semispazi comuni individuati dai piani che costituiscono le facce. Quindi un solido potrà essere rappresentato in proiezione stereografica dall'intersezione dei semispazi individuati dalle sue facce. In proposito facciamo un esempio molto semplice. In Fig. 7.5 due piani (90/50 e orizzontale) dividono lo spazio in quattro angoli diedri che sono rappresentati nella stessa figura anche in proiezione sferica. All'estremità inferiore della figura è riportata la proiezione stereografica dell'intersezione dei quattro semispazi individuati dai due piani:

- la zona compresa dentro a entrambi i cerchi comprende tutte le rette dirette verso il semispazio superiore del piano 90/50 e del piano orizzontale;
- la zona esterna a entrambi i cerchi comprende tutte le rette dirette verso il semispazio inferiore del piano 90/50 e del piano orizzontale;
- la zona compresa dentro alla proiezione del piano 90/50 ma esterna alla proiezione del piano orizzontale comprende tutte le rette dirette verso il semispazio superiore del piano 90/50 e verso il semispazio inferiore del piano orizzontale;
- la zona esterna alla proiezione del piano 90/50, ma interna alla proiezione del piano orizzontale comprende tutte le rette dirette verso il semispazio inferiore del piano 90/50 e verso il semispazio superiore del piano orizzontale.

Due sistemi di piani come quelli di Fig. 7.5 non individuano un solido finito. Il solido più semplice ha sei facce e quindi saranno necessari almeno tre sistemi di piani paralleli. La proiezione di solidi di questo tipo è trattata più avanti a proposito della proiezione stereografica dei blocchi che costituiscono gli ammassi rocciosi.

Concludendo, i principali vantaggi all'uso della proiezione planosferica sono i seguenti:

- La rete è facile da usare sia in campagna che in laboratorio. Mediante poche costruzioni è possibile risolvere un gran numero di problemi.

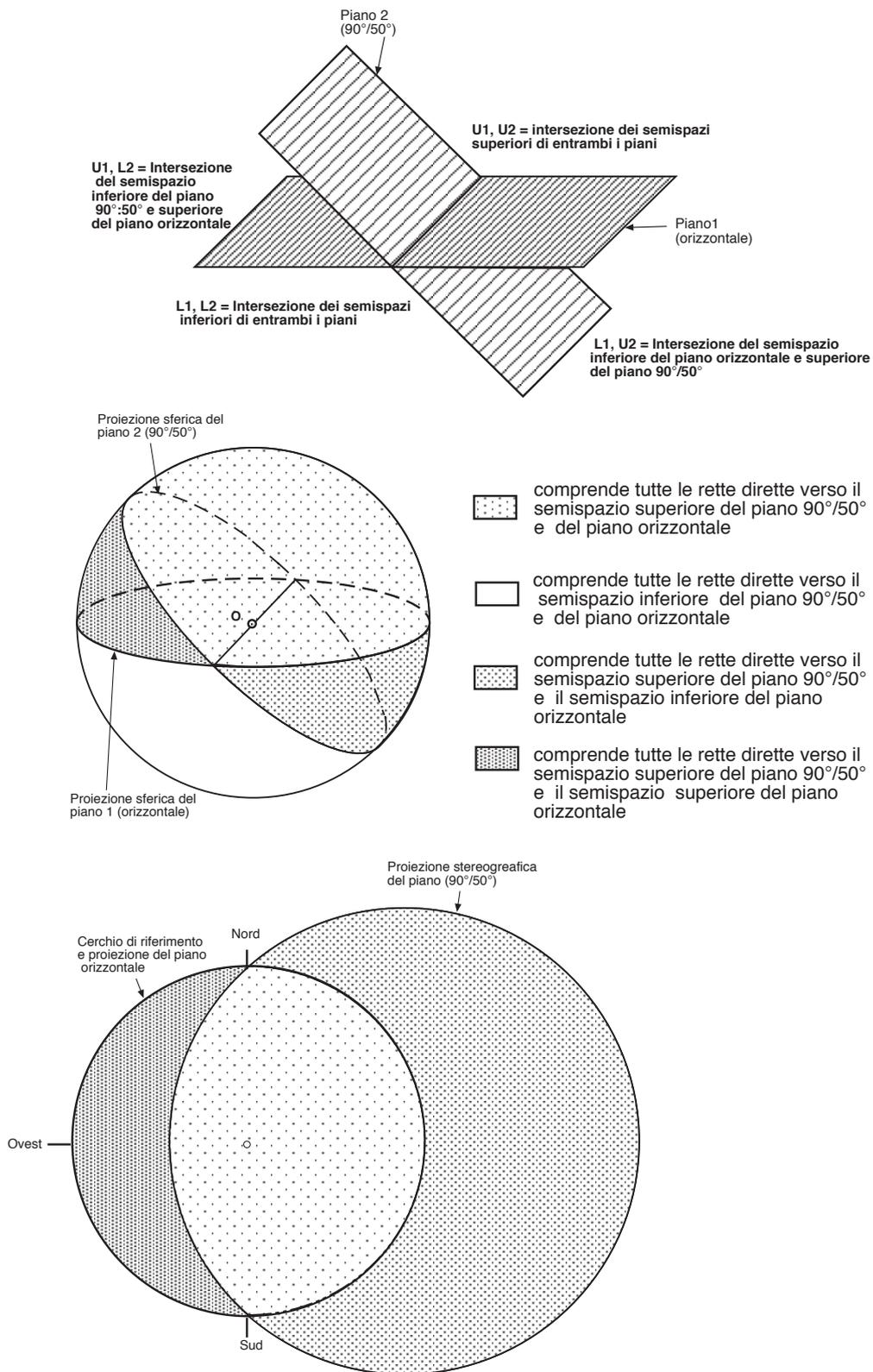


Figura 7.5 Proiezione dell'intersezione di quattro semispazi individuati dai piani 90/50 e orizzontale.

- b) Il grado di precisione che si può tenere nelle elaborazioni è minore di 1°, e quindi dell'ordine della precisione delle misure che generalmente il geologo riesce a eseguire in campagna.
- c) E' possibile proiettare sullo stesso diagramma un gran numero di misure. Il gran numero di dati permette interpretazioni statistiche con elevato grado di precisione.  
D'altra parte però non si deve dimenticare nemmeno che:
  - a) Sebbene la proiezione planosferica rappresenti un ottimo strumento di analisi esso non è sempre il miglior modo di presentare dati a chi non abbia una buona pratica di questo metodo. Spesso è opportuno aiutarsi nella rappresentazione dei risultati con altri tipi di proiezione di più immediata comprensione (*block diagram*).
  - b) Le proiezioni consentono di analizzare le relazioni angolari tra gli elementi geometrici (piani e linee) ma non danno indicazioni sulla loro distribuzione spaziale. Non bisogna dimenticare che anche nei problemi di stabilità la posizione relativa delle strutture può essere più importante dei loro rapporti angolari.

# Bibliografia

Sono riportati i riferimenti bibliografici citati nel testo e riferimenti a libri o articoli che trattano vari aspetti delle proiezioni stereografiche.

- [1] BADGLEY P.C. (1959) - *Structural problems for the Exploration Geologist*. Harper & Brother, New York, 280 pp.
- [2] BILLINGS M.P. (1942) - *Structural Geology*. Prentice-Hall, New York, 473 pp.
- [3] DONN W.L. & SHIMER J.A. (1958) - *Graphics Methods in Structural geology*. Appleton-Century-Crofts, New York, 180 pp.
- [4] DUNCAN A. (1981) - *A review of Cartesian coordinate construction from a sphere, for generation of two-dimensional geological net projections*. Computers & Geosciences, 7 (4), 367–385.
- [5] FAIRBAIN H. (1949) - *Structural Petrology of Deformed Rocks*. Addison-Wesley, Cambridge, Ma, 344 pp.
- [6] FEDOROV E. (1892) - *Universal-(Theodolith-) Methode in der Mineralogie und Petrographie. I. Universalgeometrische Untersuchungen*. Z. Kristallogr. Mineral., 21, 574–678.
- [7] FEDOROV E. (1897) - *Universalmethode und Feldspathstudien. III. Die Feldspäthe des Bogslowsk'schen Bergreviere*. Z. Kristallogr. Mineral., 29, 604–658.
- [8] GOODMAN R.E. (1976) - *Methods of Geological Engineering*. West Publishing Company, St. Paul, 472 pp.
- [9] GOODMAN R.E. (1989) - *Introduction to Rock Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, 582 pp.
- [10] GUNTHER R.T. (1932) - *The Astrolabes of the World*. Holland Press, London, 609 pp.
- [11] HAFF J. (1938) - *Preparation of petrofabric diagrams*. American Journal of Science, 23, 543–574.
- [12] HALLEY E. (1696) - *An easie demonstration of the analogy of the logarithmick tangents to the meridian line or sum of the secants: with various methods of computing the same to the utmost exactness*. Philosophical Transaction of the Royal Society London, A, 19, 202–214.
- [13] HILLS E. (1940) - *Outlines of Structural Geology*. Methuen, London, 172 pp.
- [14] HOBBS B.E., MEANS W.D. & WILLIAMS P.F. (1976) - *An Outline of Structural Geology*. John Wiley & Sons, New York, 571 pp.
- [15] HOWARTH R. (1996) - *History of the stereographic projection and its early use in geology*. Terra Nova, 8, 499–513.
- [16] KALSBECK F. (1963) - *A hexagonal net for the counting-out and testing fabric diagrams*. Neues Jahrbuch für Geologie und Paläontologie, Monatshefte, 7, 173–176.
- [17] KNOPF E. (1933) - *Petrotectonics*. American Journal of Science, 25, 433–470.
- [18] KNOPF E.B. & INGERSON E. (1938) - *Structural Petrology, Geological Society of America Memoir*, vol. 6. Geological Society of America, Washington, 270 pp.
- [19] KRUMBEIN W. (1939) - *Preferred orientation of pebbles in sedimentary deposits*. Journal of Geology, 47, 673–706.
- [20] LAMBERT J. (1772) - *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten*. In: *Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung*. III., pp. 105–199. Buchhandlung

der Realschule, Berlin.

- [21] LISLE R.J. & LEYSHON P.R. (2004) - *Stereographic Projection Techniques for Geologists and Civil Engineers*. Cambridge School Press, Cambridge, 112 pp.
- [22] MAINWARING J. (1942) - *An Introduction to the Study of Map Projection*. Macmillan, London, 113 pp.
- [23] MALLARD E. (1879) - *Traité de Cristallographie Géométrique et Physique*. Dunod, Paris, 372 pp.
- [24] MELLIS O. (1942) - *Gefügediagramme in stereographischer Projektion*. Z. Miner. Petrogr. Mitt., 53, 330–353.
- [25] MOON J. (1978) - *Worked Examples in Stereographic Projection*, vol. Monograph. The Institution of Metallurgists, London, 99 pp.
- [26] NEUMANN F. (1823) - *Beiträge zur Kristallonomie*. Ernst Siegfried Mittler, Berlin, 263 pp.
- [27] PHILLIPS F. (1972) - *The Use of Stereographic Projections in Structural Geology*. Arnold, London, 90 pp.
- [28] PRIEST S.D. (1985) - *Hemispherical Projection Methods in Rock Mechanics*. George Allen & Unwin, London, 124 pp.
- [29] RAGAN D. (1985) - *Structural Geology: An Introduction to Geometric Techniques*. John Wiley & Sons, New York, 393 pp.
- [30] RAISZ E. (1948) - *General Cartography*. McGraw-Hill, New York, 354 pp.
- [31] RAMSAY J.G. (1967) - *Folding and Fracturing of Rocks*. McGraw-Hill, New York, 568 pp.
- [32] RICHTER K. (1936) - *Ergebnisse und Aussichten der Gefügeforschung im pommerschen Diluvium*. Geologische Rundschau, 27, 196–206.
- [33] SANDER B. (1930) - *Gefügekunde der Gesteine*. Springer, Vienna, 352 pp.
- [34] SCHMIDT W. (1925) - *Gefügestatistik*. Tschermaks mineralogische petrographische Mitteilungen, 38, 395–399.
- [35] SCHMIDT W. (1926) - *Gefügesymmetrie und Tektonik*. Jahrbuch der Geologischen Bundesanstalt Wien, 73, 407–430.
- [36] SNEYDER J.P. (1982) - *Map Projections used by the U.S. Geological Survey*, vol. Bulletin. United States Geological Survey, Washington, 313 pp.
- [37] STEERS J. (1959) - *An Introduction to the Study of Map Projections*. School of London Press, London, 330 pp.
- [38] TURNER F.J. & WEISS L.E. (1963) - *Structural Analysis of Metamorphic Tectonites*. McGraw Hill, New York, 545 pp.
- [39] VIALON P., RUHLAND M. & GROLIER J. (1991) - *Éléments de Tectonique Analytique*. Masson, Paris, 118 pp.
- [40] VISTELIUS A.B. (1966) - *Structural Diagrams*. Pergamon Press, Oxford, 178 pp.
- [41] WULFF G. (1902) - *Untersuchungen im Gebiete der optischen Eigenschaften isomorpher Krystalle*. Z. Kristallogr. Mineral., 36, 1–28.

# Appendici



## Appendice A

# Reticoli per proiezioni stereografiche

Nelle pagine seguenti sono riportati:

- a) reticolo equiangolare di Wulff (Fig. A.1);
- b) reticolo equiarea di Schmidt (Fig. A.2);
- c) reticolo equiangolare polare (Fig. A.3);
- d) reticolo equiarea polare (Fig. A.4);
- e) reticolo per proiezioni planosferiche (Fig. A.5);
- f) reticolo di Kalsbeek per analisi statistica (Fig. A.6)

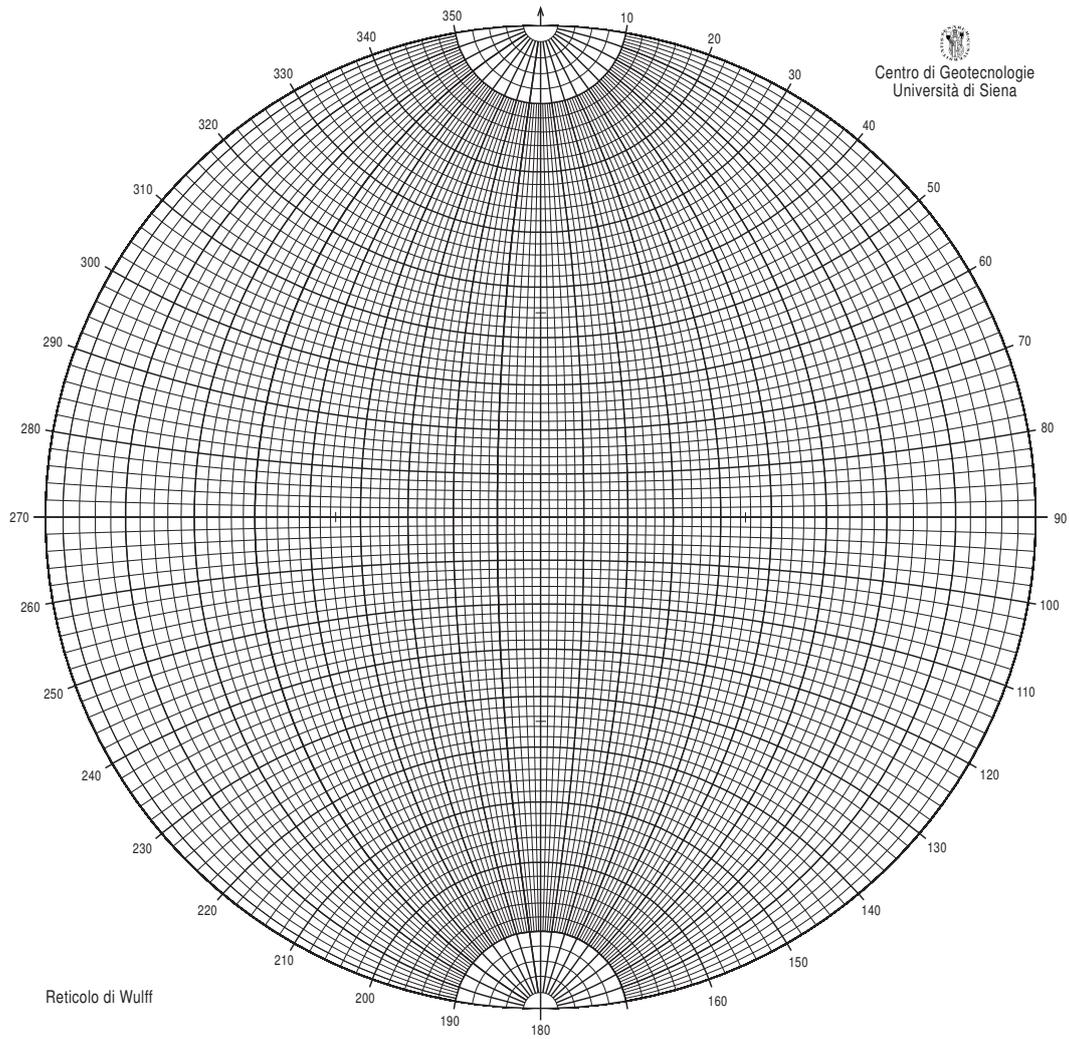


Figura A.1 Reticolo equiangolare di Wulff.

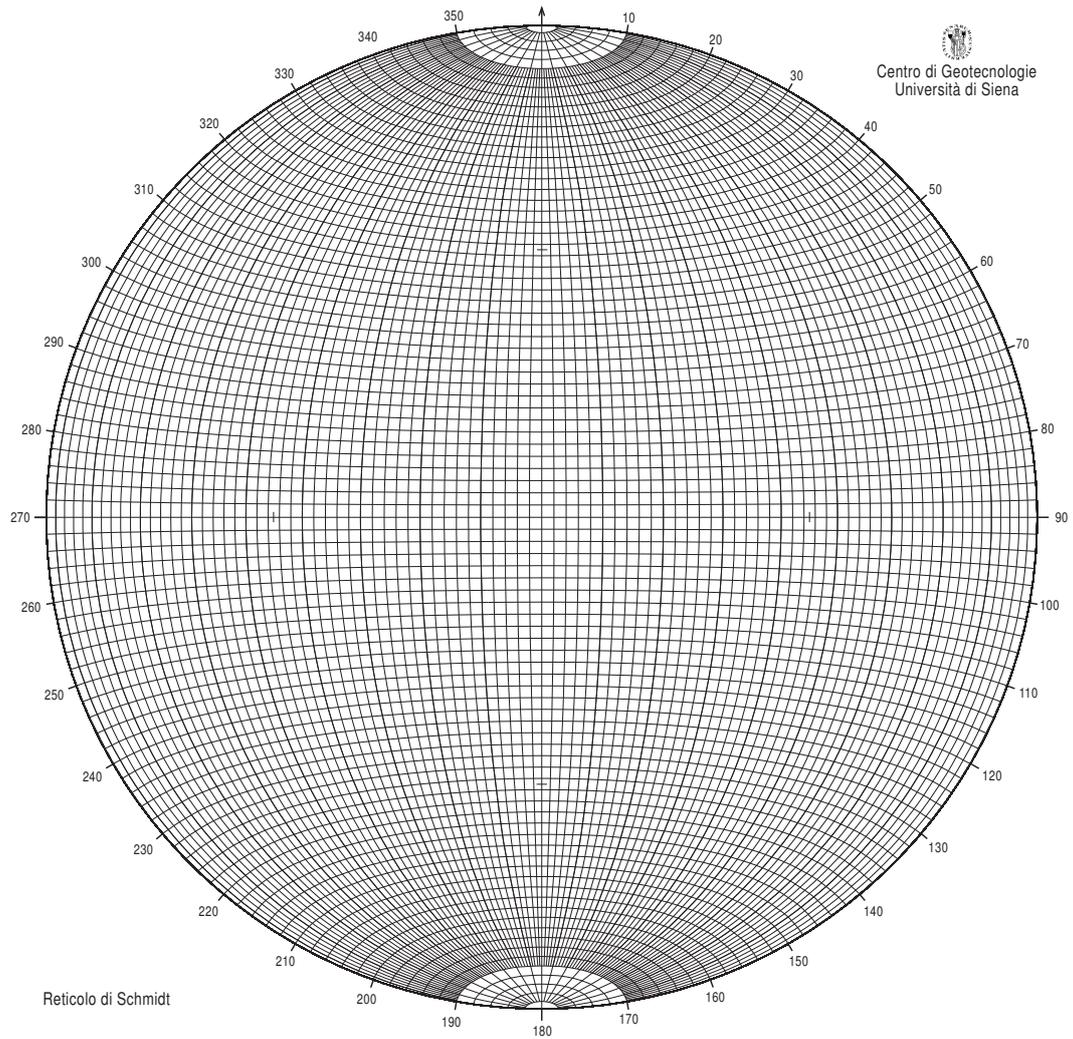


Figura A.2 Reticolo equiarea di Schmidt.

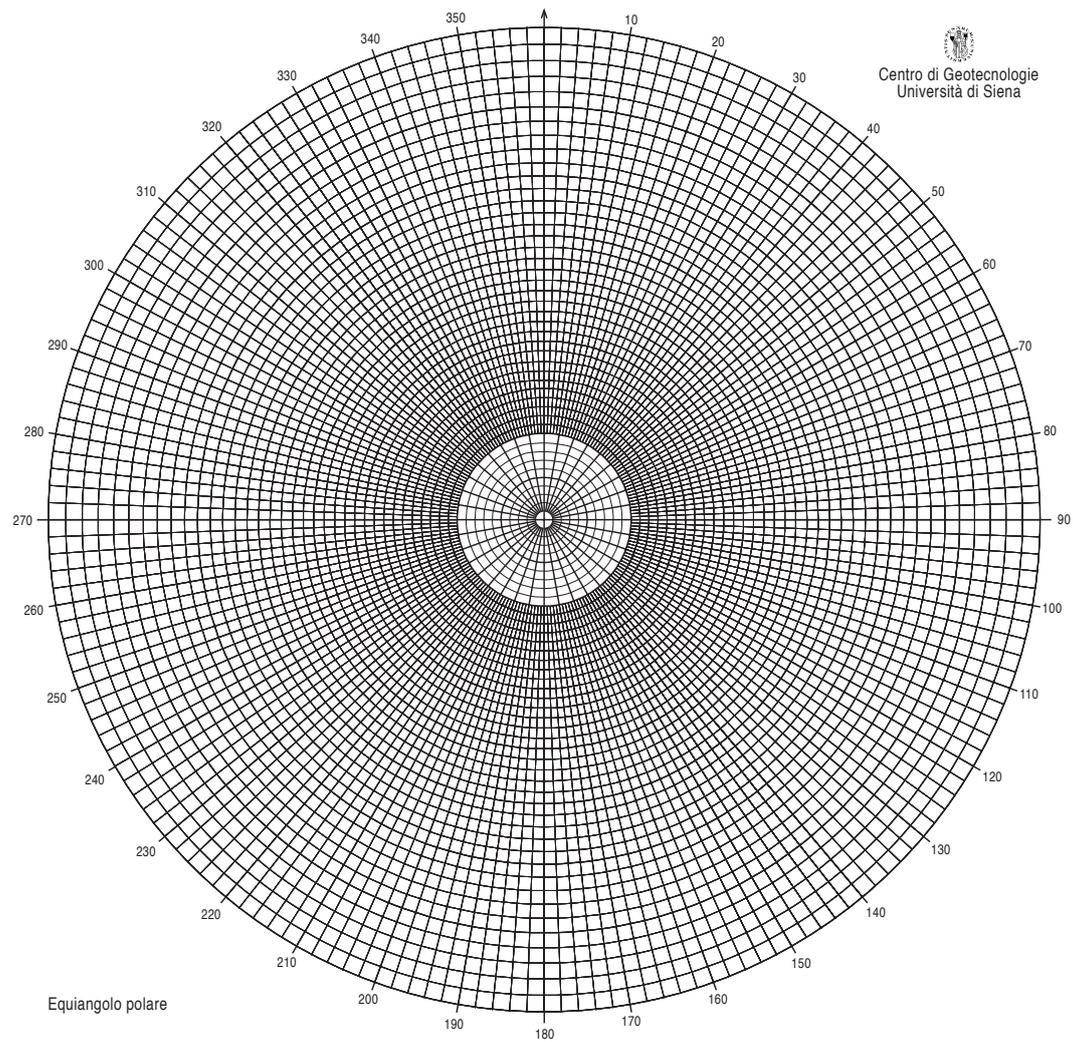


Figura A.3 Reticolo equangolare polare.

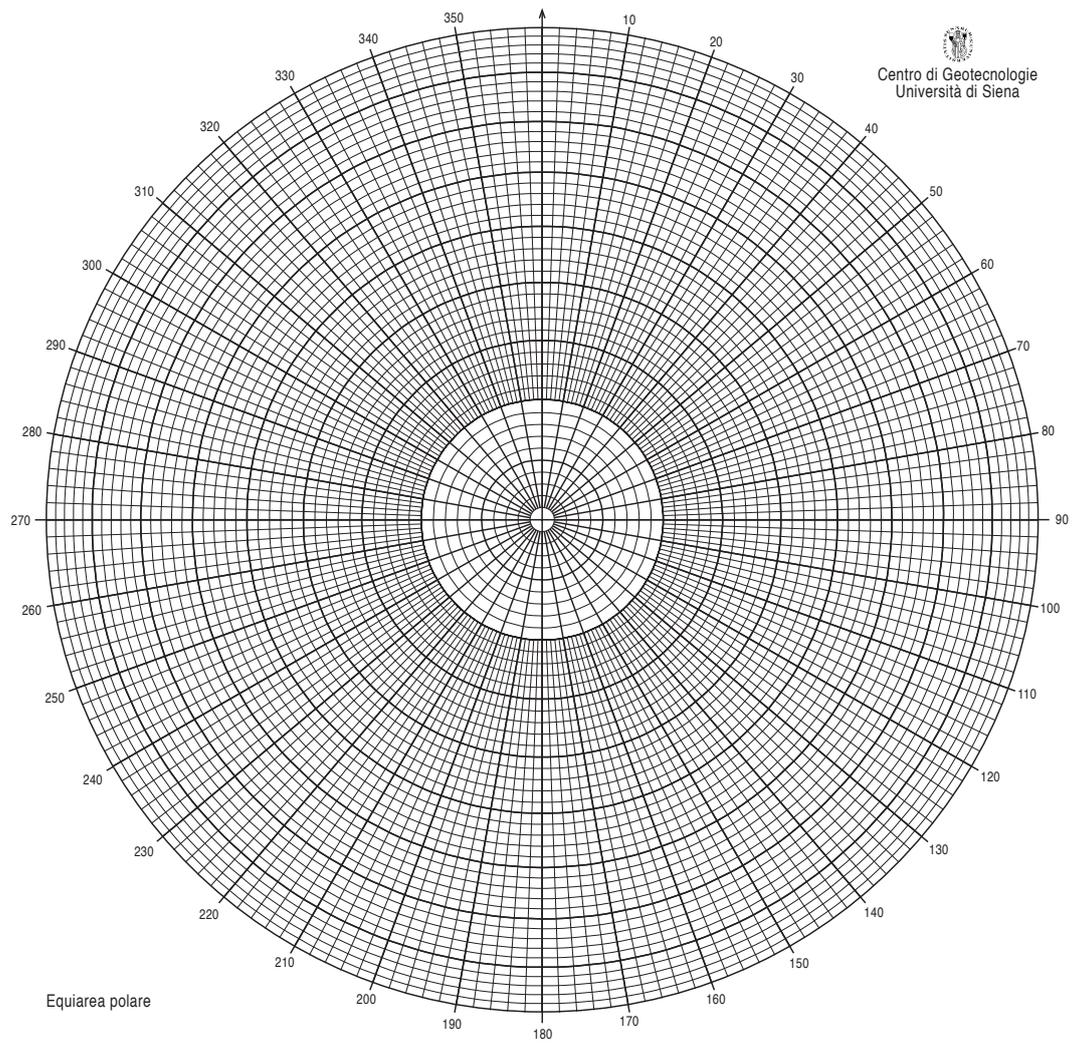


Figura A.4 Reticolo equiarea polare.

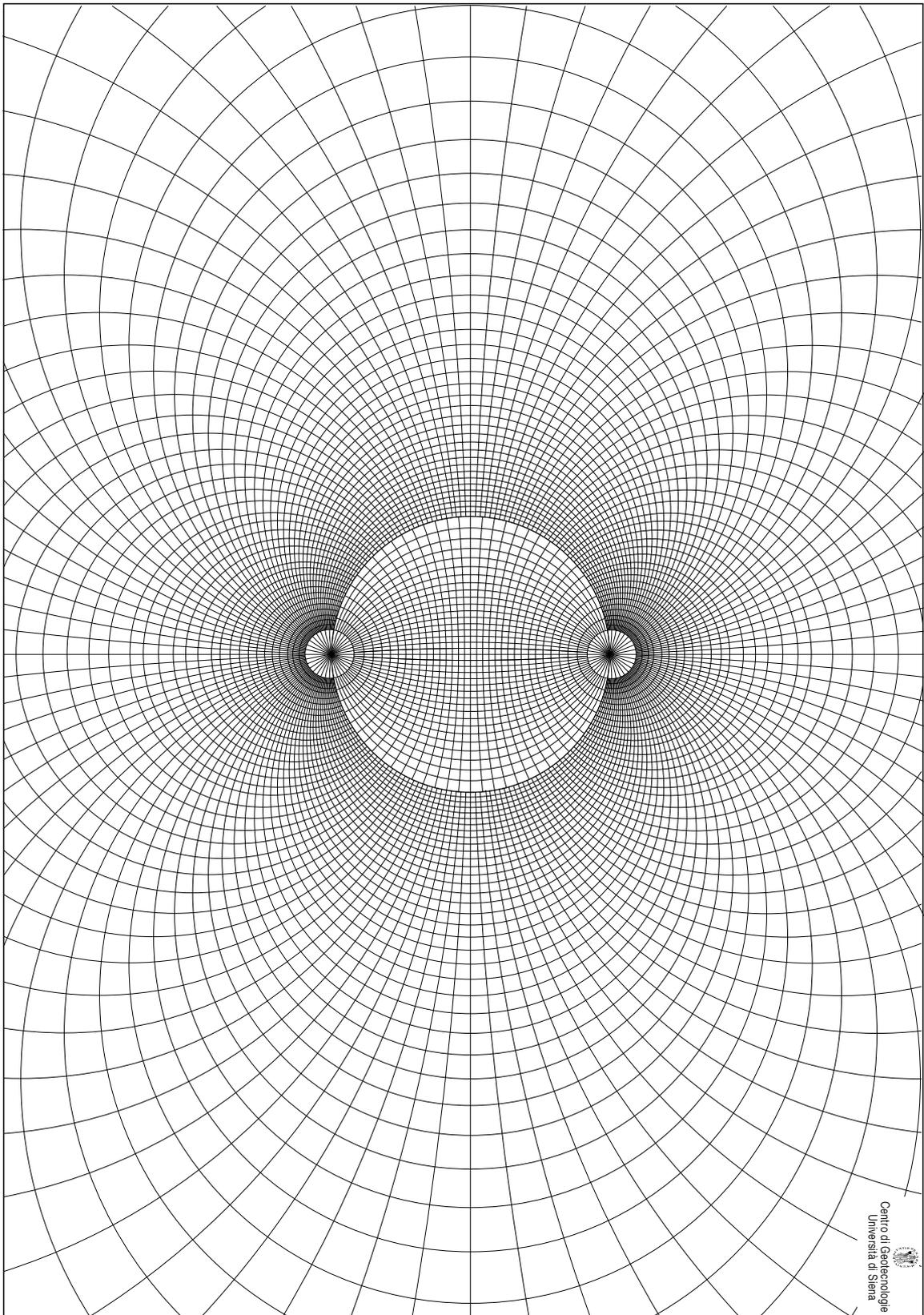


Figura A.5 Reticolo equiangolare per proiezioni stereografiche planosferiche.

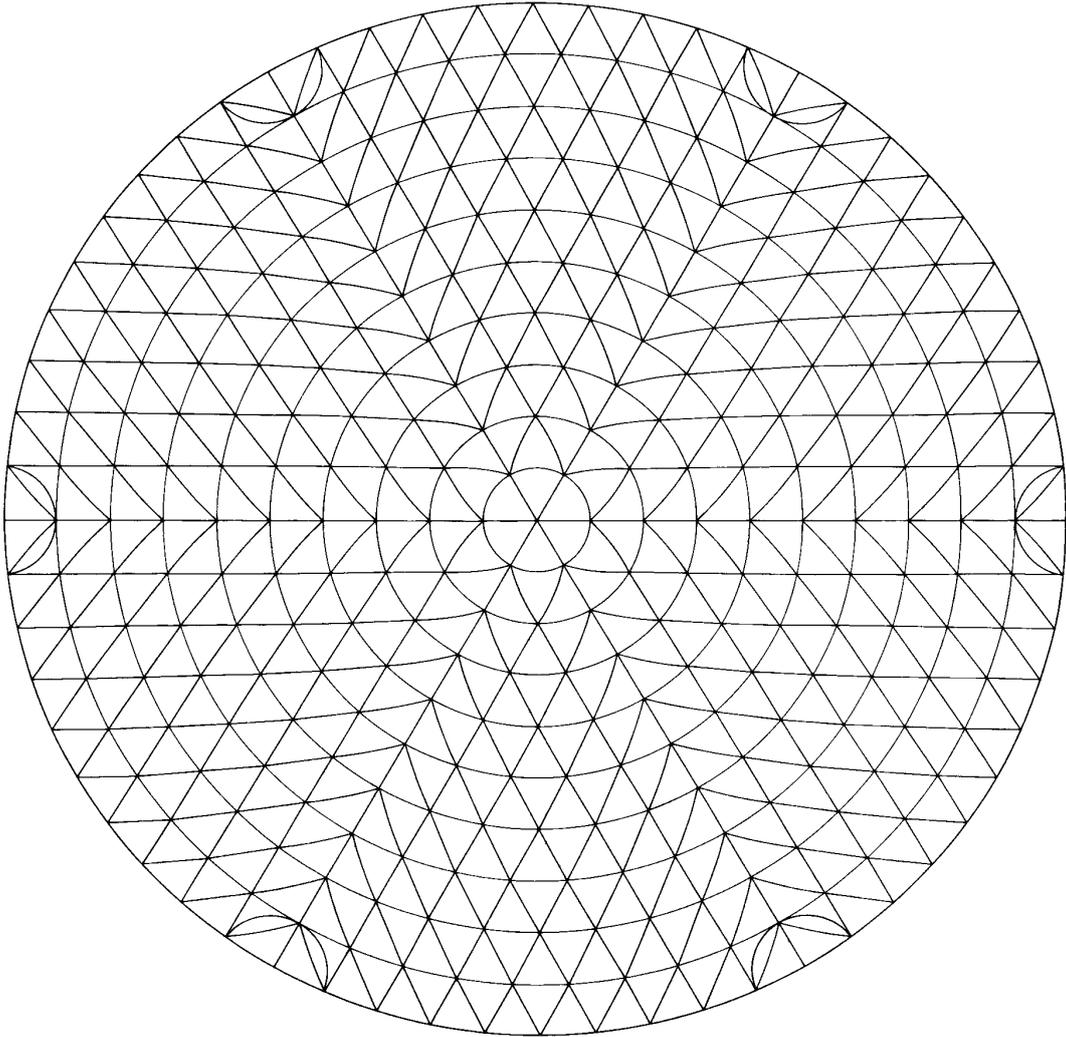


Figura A.6 Reticolo di Kalsbeek per analisi statistica [16].



## Appendice B

# Rotazioni: restaurazione di strati inclinati, discordanze e paleocorrenti

Nel Capitolo 5.10 abbiamo visto come effettuare rotazioni di piani e linee attorno ad assi verticali, orizzontali o inclinati. Tra i vari problemi geologici che richiedono la rotazione attorno ad un asse per essere risolti ricordiamo la restaurazione della giacitura di strati al di sotto di una discordanza e la restaurazione della direzione di paleocorrenti.

### B.1 Restaurazione di strati inclinati e discordanze

In campagna spesso ci si trova di fronte a strati inclinati e a superfici di discordanza inclinate, con l'aiuto delle proiezioni stereografiche è possibile ricavare la giacitura degli strati prima del piegamento che ha prodotto l'inclinazione della stratificazione nell'area.

Supponiamo di avere in un'area due formazioni (A e B in Fig. B.1), separate da una discordanza. Poiché gli strati della formazione A formano un angolo con la discordanza, significa che la formazione A era stata deformata prima dell'erosione e della deposizione della formazione B. Siccome anche la formazione B è inclinata, un piegamento ha avuto luogo anche successivamente alla deposizione della formazione B.

Se vogliamo conoscere la giacitura della formazione A prima dell'ultimo evento deformativo, quello che ha interessato anche la formazione B, dobbiamo procedere nel seguente modo:

- a) Se non ci sono altre informazioni circa gli assi delle pieghe che hanno prodotto la deformazione nell'area, si assume che gli strati della formazione B sono stati inclinati da pieghe con asse orizzontale e direzione parallela a quella degli strati stessi (direzione N 20E). È attorno a questo asse che sarà effettuata la retrorotazione degli strati.
- b) Si riportano in proiezione stereografica i poli della stratificazione per la formazione A e B (Fig. B.1b).
- c) Si riporta l'asse di rotazione R e si ruota il lucido fino a portare l'asse R a coincidere con il Nord del net (Fig. B.1c).
- d) Si porta il polo della formazione B all'orizzontalità, cioè al centro dello stereogramma nel punto B'. Si legge quant'è in gradi la rotazione necessaria per raggiungere l'orizzontalità (30° nell'esempio di Fig. B.1c).
- e) Si ruota anche il polo della formazione A della stessa quantità (30°) e nel solito senso attorno al solito asse, muovendoci lungo i piccoli cerchi. Il polo di A assume la nuova posizione A'.
- f) Si riporta anche la traccia ciclografica del polo A' (Fig. B.1d).
- g) A' è il polo della stratificazione della formazione A prima del piegamento che ha inclinato la discordanza e la formazione B. Questa giacitura è illustrata in Fig. B.1e e nella proiezione stereografica di Fig. B.1f.

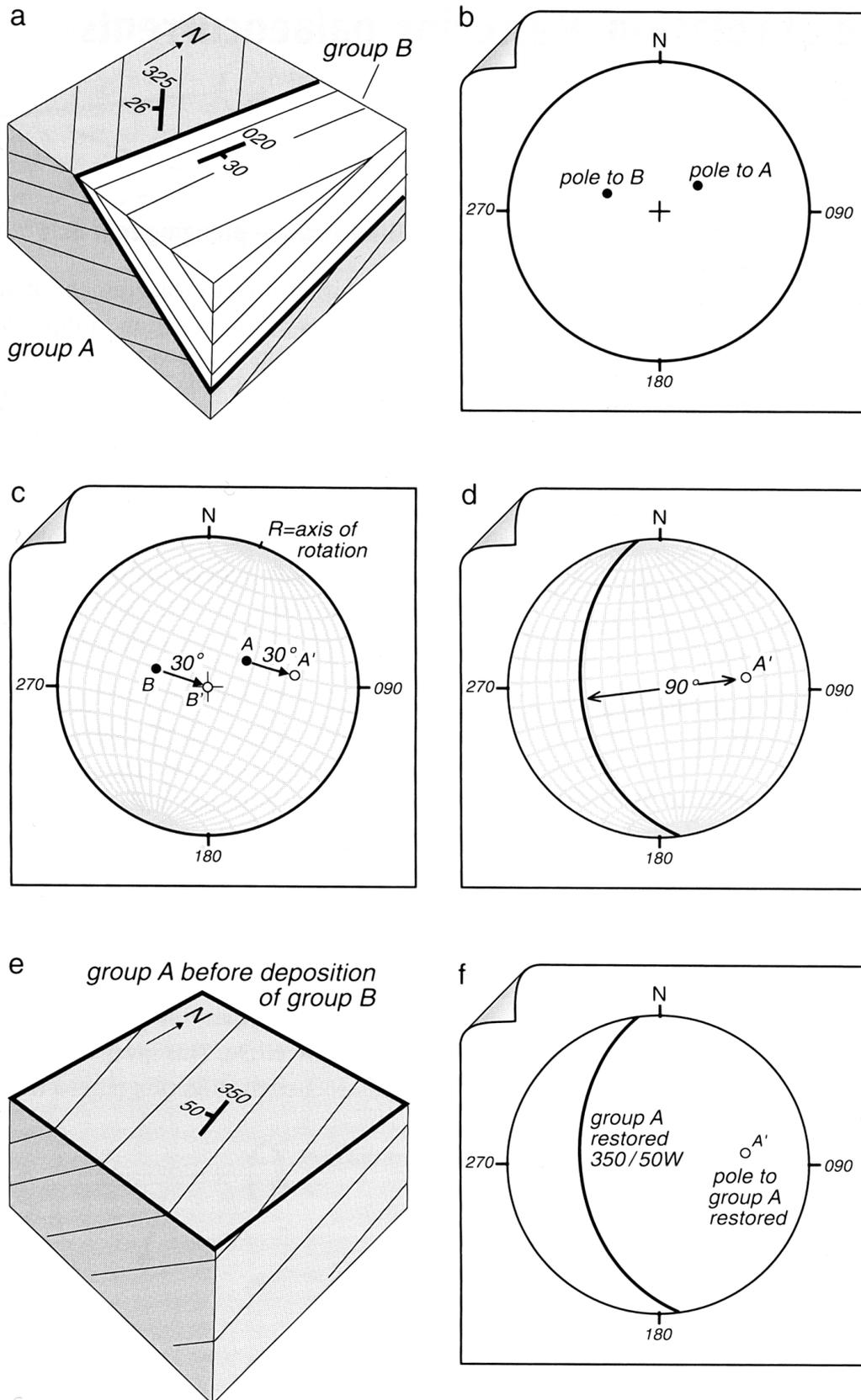


Figura B.1 Esempio di rotazione attorno ad un asse orizzontale di strati e discordanze, da [21].

## B.2 Restaurazione di paleocorrenti

Una grande varietà di strutture sedimentarie lineari (*flute cast*, ecc.) forniscono informazioni sulla direzione della corrente al momento della sedimentazione. In aree in cui gli strati sono inclinati a seguito di successivi piegamenti la misura diretta in campagna di queste strutture lineari non fornisce l'originaria direzione della corrente, ma è necessaria una restaurazione, cioè un retrorotazione che tenga conto dell'inclinazione subita durante il piegamento. Sono possibili due differenti situazioni:

- a) presenza di strati inclinati a seguito di piegamento con asse orizzontale o asse sconosciuto;
- b) presenza di strati inclinati a seguito di piegamento con asse inclinato.

### B.2.1 Strati inclinati con asse orizzontale

Se le paleocorrenti si trovano su strati inclinati a seguito di piegamento in pieghe con asse orizzontale o asse sconosciuto, per conoscere l'originaria orientazione della paleocorrente gli strati e le paleocorrenti misurati in campagna devono essere retro-ruotate attorno ad un asse orizzontale che ha la direzione degli strati (Fig. B.2a).

Si procede nel seguente modo:

- a) Riportare in proiezione stereografica la linea che rappresenta la paleocorrente (L in Fig. B.2b) e la direzione (strike) dello strato.
- b) Portare la direzione dello strato a coincidere con il Nord del net, cioè con il centro di tutti i piccoli cerchi.
- c) Ruotare la linea che rappresenta la paleocorrente fino all'orizzontalità, muovendola lungo il corrispondente piccolo cerchio. L'orientazione della paleocorrente prima del piegamento è L' (Fig. B.2b).

Il senso di rotazione lungo il piccolo cerchio dipende dalla giacitura dello strato. Se gli strati sono in giacitura diritta (Fig. B.2a) l'angolo di retrorotazione richiesto è minore di  $90^\circ$ . Se gli strati sono in giacitura rovesciata (Fig. B.2c) la paleocorrente sarà riportata all'orizzontalità attraverso un angolo di rotazione che sarà maggiore di  $90^\circ$  ma minore di  $180^\circ$  (Fig. B.2d).

### B.2.2 Strati inclinati con asse inclinato

Se le paleocorrenti si trovano su strati inclinati a seguito di piegamento in pieghe con asse inclinato, per semplicità si assume che questo piegamento è il risultato di un primo piegamento attorno ad un asse orizzontale, seguito da un altro piegamento attorno ad un altro asse sempre orizzontale, ma ortogonale rispetto al precedente. La restaurazione dell'orientazione delle paleocorrenti in questo caso è una procedura che necessita di due rotazioni successive. Si procede nel seguente modo:

- a) Si riporta in proiezione stereografica l'asse della piega misurato in campagna e la paleocorrente (f e L in Fig. B.2f).
- b) Si trova il primo asse di rotazione orizzontale, è l'asse la cui direzione è ortogonale a quella dell'asse misurato.
- c) Si porta questo primo asse di rotazione orizzontale a coincidere con il Nord del net e in questa posizione si porta all'orizzontalità l'asse misurato in campagna muovendolo sul corrispondente piccolo cerchio fino alla posizione f' (Fig. B.2f). Misurare l'angolo richiesto per questa rotazione. Muovere anche la linea che rappresenta la paleocorrente dello stesso valore angolare fino alla nuova posizione L'.
- d) A questo punto si opera la seconda rotazione, la linea nella posizione L' va ruotata fino all'orizzontalità attorno all'asse f'. Per fare questo, come in precedenza, si porta f' a coincidere con il Nord del net e si muove la linea sul corrispondente piccolo cerchio fino all'equatore del cerchio di proiezione (Fig. B.2h).

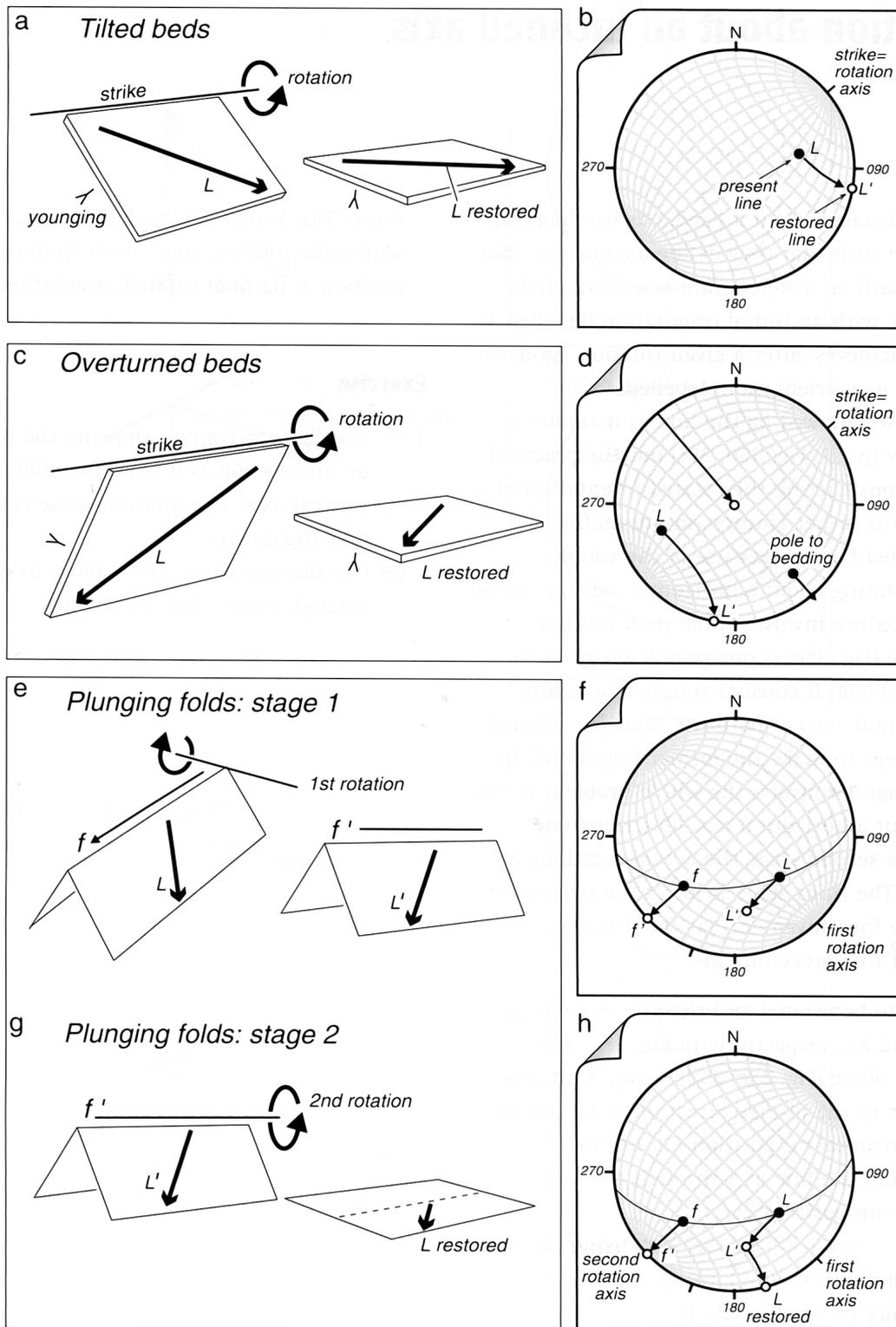


Figura B.2 Esempio di restaurazione di paleocorrenti, da [21].

## Appendice C

# Soluzione degli esercizi

Se non espressamente indicato le proiezioni sono state effettuate utilizzando il reticolo equiarea di Schmidt, sfera di proiezione inferiore.

- Soluzione dell'Esercizio 1 a pagina 22.** La proiezione delle linee è riportata in Fig. C.1a.
- Soluzione dell'Esercizio 2 a pagina 22.** La proiezione delle tracce ciclografiche dei piani è riportata in Fig. C.1b.
- Soluzione dell'Esercizio 3 a pagina 25.** La proiezione delle tracce ciclografiche dei piani è riportata in Fig. C.2.
- Soluzione dell'Esercizio 4 a pagina 30.** La proiezione delle tracce ciclografiche dei piani è riportata in Fig. C.1b.
- Soluzione dell'Esercizio 5 a pagina 31.** Le linee sono riportate in Fig. C.4a.
- Soluzione dell'Esercizio 6 a pagina 31.** Il piano ha inclinazione di  $48^\circ$  (Fig. C.4b); la linea ha un pitch di  $36^\circ$ .
- Soluzione dell'Esercizio 7 a pagina 31.** Il piano ha direzione di immersione  $110^\circ$  (Fig. C.4b).
- Soluzione dell'Esercizio 8 a pagina 33.** I tre piani che contengono le tre coppie di linee sono: 351/48, 191/67, 11/62 (Fig. C.5a)
- Soluzione dell'Esercizio 9 a pagina 34.** Le linee intersezione delle tre coppie di piani hanno giacitura: 24/27, 158/13, 184/17 (Fig. C.5b)
- Soluzione dell'Esercizio 10 a pagina 36.** Lo strato mostra un'inclinazione apparente di  $24^\circ$  verso W (Fig. C.6a).
- Soluzione dell'Esercizio 11 a pagina 36.** Lo strato ha giacitura 139/40 (Fig. C.6b).
- Soluzione dell'Esercizio 12 a pagina 36.** Gli angoli tra le tre coppie di linee sono rispettivamente:  $17^\circ$ ,  $55^\circ$  e  $51^\circ$  (Fig. C.7a).
- Soluzione dell'Esercizio 13 a pagina 39.** Gli angoli tra le tre coppie di piani sono rispettivamente:  $21^\circ$ ,  $31^\circ$  e  $30^\circ$  (Fig. C.7b).

**Soluzione dell' Esercizio 14 a pagina 41.** Le giaciture dei piani bisettori le tre coppie di piani sono rispettivamente:  $2/43$ ,  $170/34$  e  $89/56$  (Fig. C.8a).

**Soluzione dell' Esercizio 15 a pagina 41.** Le proiezioni delle tre linee sui rispettivi piani sono:  $298/39$ ,  $199/29$  e  $145/33$  (Fig. C.8b).

**Soluzione dell' Esercizio 16 a pagina 42.** Gli angoli tra le tre coppie di linee e piani sono rispettivamente:  $22^\circ$ ,  $38^\circ$  e  $36^\circ$  (Fig. C.9a).

**Soluzione dell' Esercizio 17 a pagina 43.** Le nuove giaciture sono:  $72/16$ ,  $228/54$ ,  $262/76$ .

**Soluzione dell' Esercizio 18 a pagina 44.** Le nuove giaciture sono:  $36/15$ ,  $139/49$ ,  $13/13$  (Fig. C.9b).

**Soluzione dell' Esercizio 19 a pagina 45.** Le nuove giaciture sono:  $355/61$ ,  $144/6$ ,  $226/23$  (Fig. C.10).

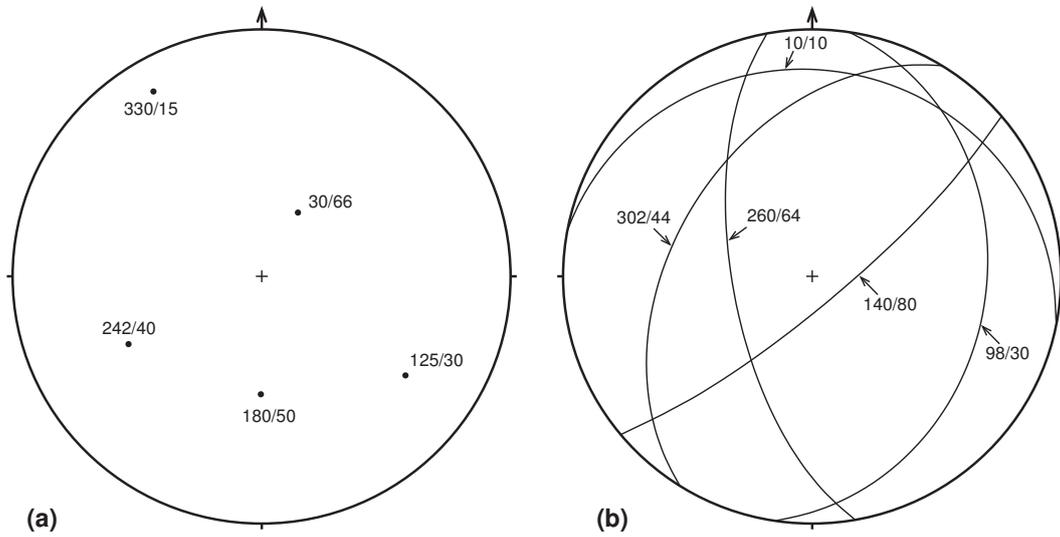


Figura C.1 (a) Proiezione stereografica di linee; Esercizio 1. (b) Proiezione di piani come tracce ciclografiche; Esercizio 2.

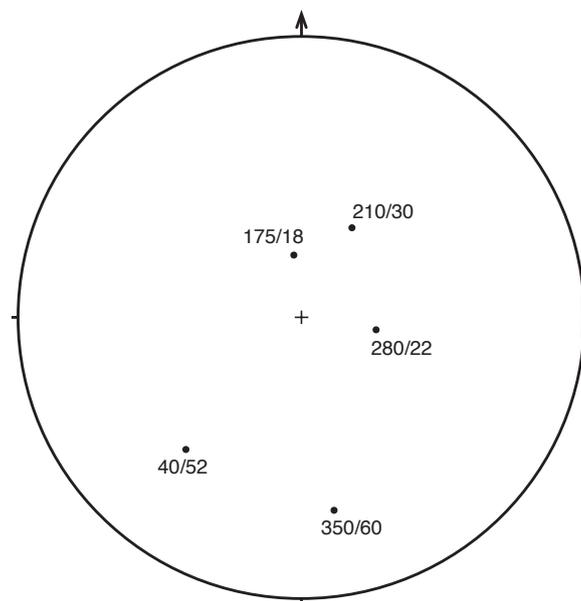


Figura C.2 Proiezione stereografica di poli di piani; Esercizio 3.

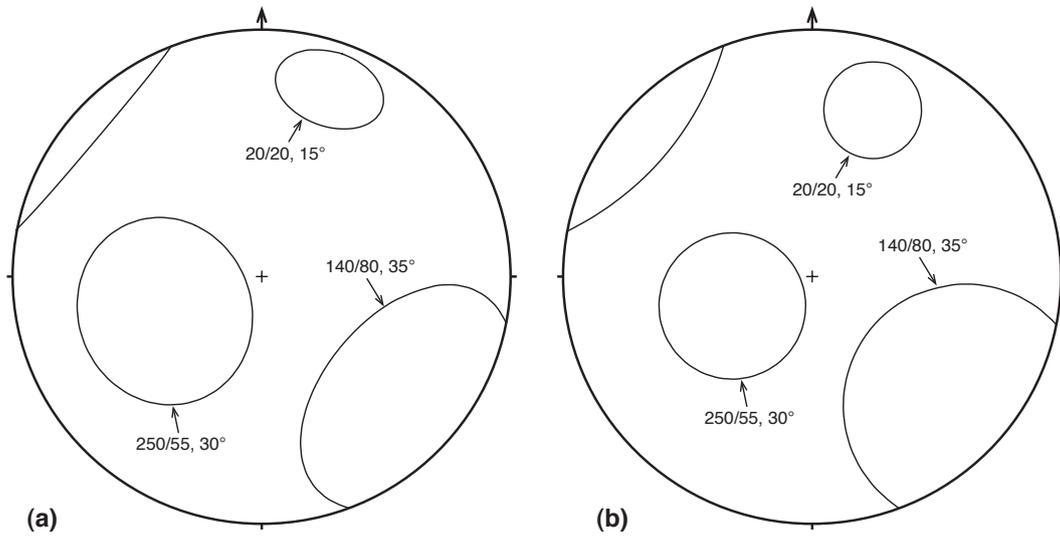


Figura C.3 (a) Coni in proiezione equiarea. (b) Coni in proiezione equiangolare. Esercizio 4

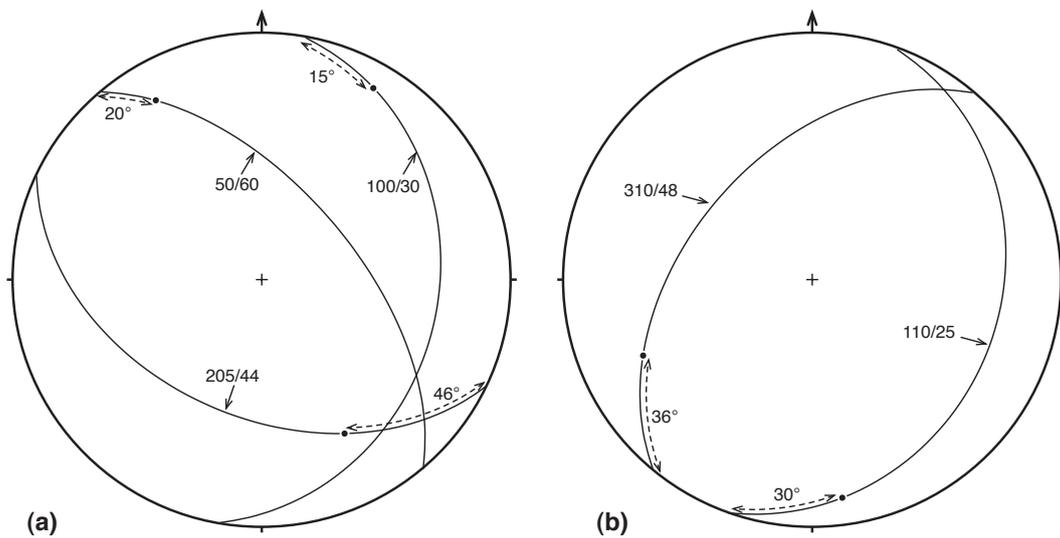


Figura C.4 (a) Proiezione di linee, noto il piano e il pitch; Esercizio 5. (b) Giacitura di piani, noto il pitch; Esercizio 6, Esercizio 7.

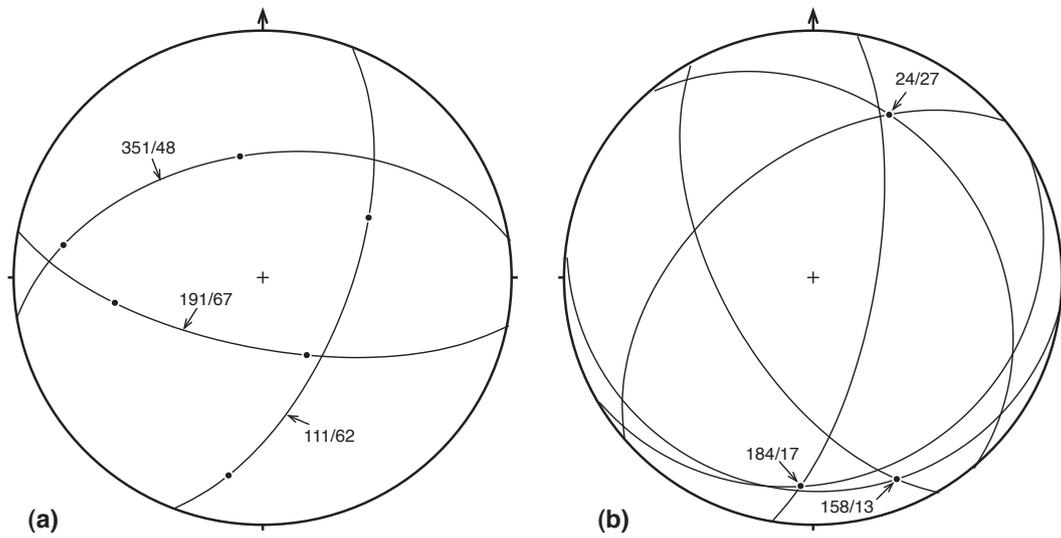


Figura C.5 (a) Piani contenenti due linee; Esercizio 8. (b) Intersezione di piani; Esercizio 9.

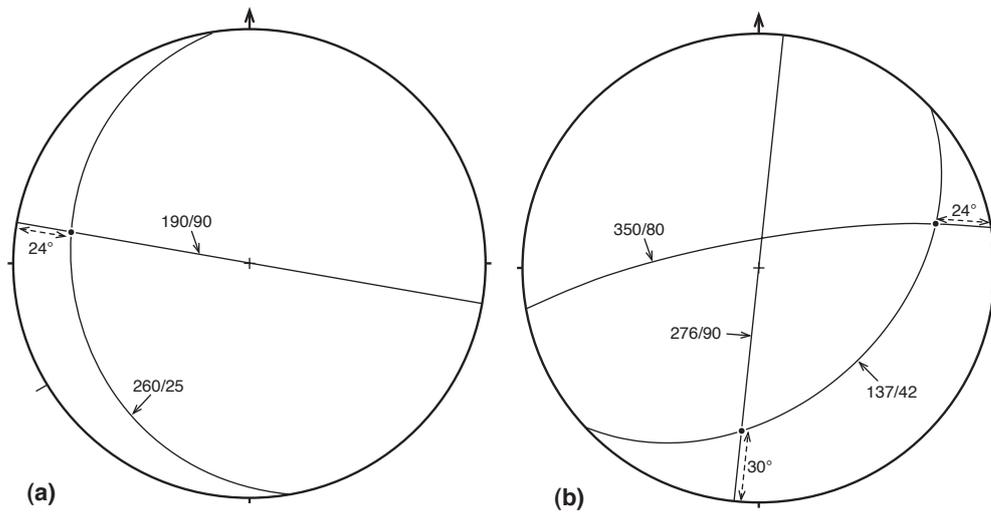


Figura C.6 (a) Inclinazione apparente di uno strato: l'inclinazione apparente è di  $24^\circ$  verso W; Esercizio 10. (b) Giacitura di uno strato note due sue inclinazioni apparenti: lo strato ha giacitura 137/42; Esercizio 11.

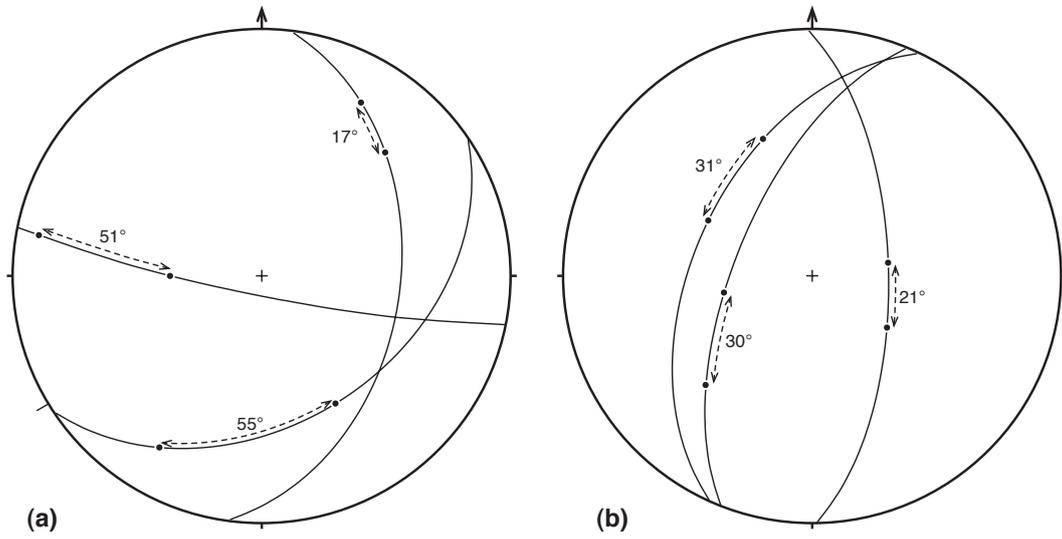


Figura C.7 (a) Angoli tra linee; Esercizio 12. (b) Angoli tra piani; Esercizio 13. I piani sono rappresentati come poli.

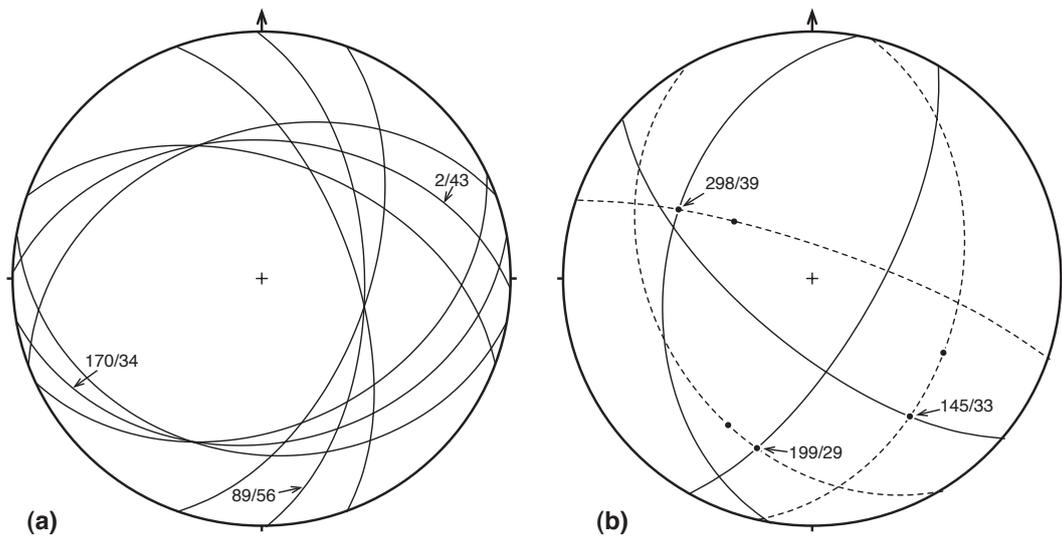


Figura C.8 Piani bisettori di coppie di piani; Esercizio 14. Proiezioni di linee su piani; Esercizio 15.

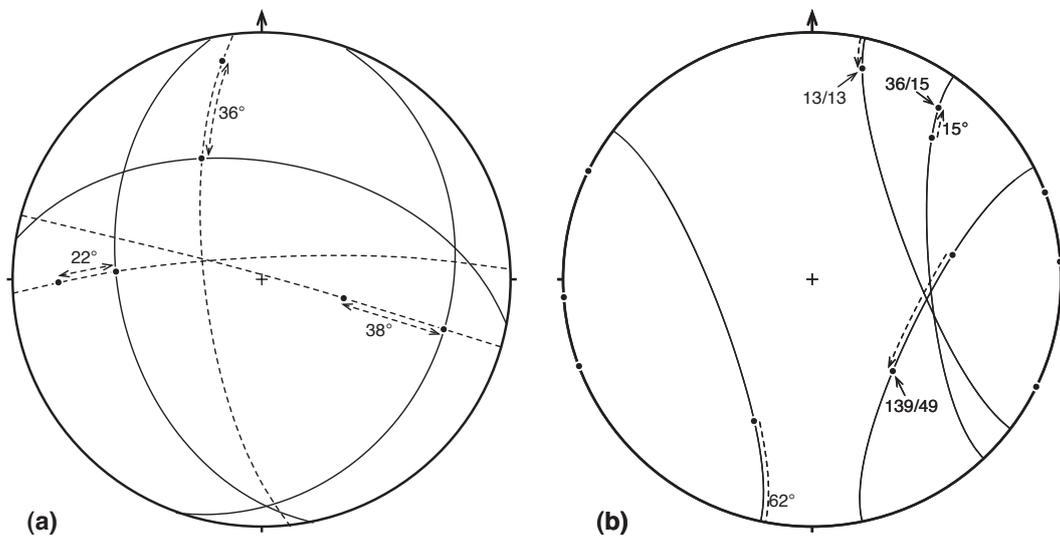


Figura C.9 Angoli tra linee e piani; Esercizio 16. (b) Rotazione di linee attorno ad assi orizzontali; Esercizio 18

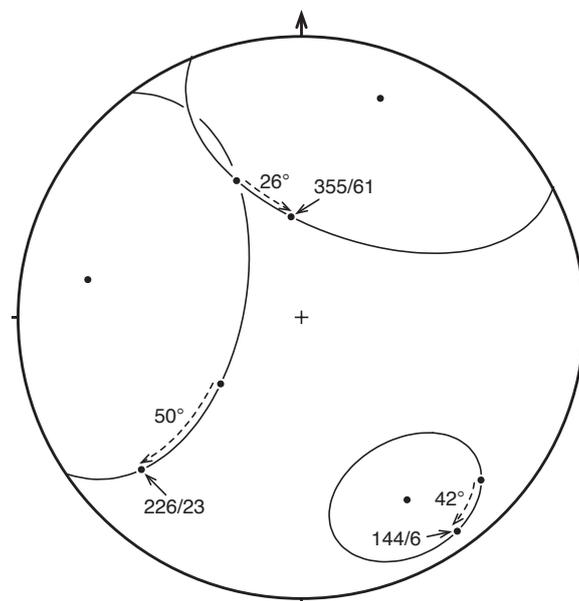


Figura C.10 Rotazione di linee attorno ad assi inclinati; Esercizio 19.